Stosując operację T^α (zob. § 48) do wzorów (63.2) i (63.6), otrzymujemy wzory ogólniejsze:

$$\frac{1}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^n}=\left\{\frac{e^{\alpha t}}{(2\beta^2)^{n-1}}\left[A_n(\beta^2t^2)\cdot\frac{1}{\beta}\sin\beta t-B_n(\beta^2t^2)\cdot t\cos\beta t\right]\right\}$$

dla $n=1,2,\ldots$ i

$$\frac{s}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^n}=$$

$$=\left\{\frac{e^{\alpha t}}{2(n-1)(2\beta^2)^{n-2}}\left[A_{n-1}(\beta^2t^2)\cdot\frac{t}{\beta}\sin\beta t-B_{n-1}(\beta^2t^2)\cdot t^2\cos\beta t\right]\right\}$$

dla $n=2,3,\ldots$

CZĘŚĆ TRZECIA

SZKIC OGÓLNEJ TEORII RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH LINIOWYCH O WSPÓŁCZYNNIKACH STAŁYCH

ROZDZIAŁ I

Równania jednorodne

§ 1. Uwagi wstępne

Równanie struny drgającej, równanie ciepła i równanie telegrafistów są przykładami równań różniczkowych liniowych o współczynnikach stałych; mają one postać

$$x''-\alpha^2s^2x=0,\qquad x''-asx=0,\qquad x''-(Ls+R)(Cs+G)x=0.$$

Obecnie zajmiemy się równaniami ogólniejszymi

$$a_m x^{(m)}+\ldots+a_0x=f(\lambda);\tag{1.1}$$

współczynniki $a_m,\ldots,a_0$ ($a_m\neq 0$) mogą być dowolnymi operatorami, $f(\lambda)$ dowolną funkcją operatorową ciągłą; $x=x(\lambda)$ jest funkcją operatorową niewiadomą. W szczególnym przypadku, gdy operatory $a_m,\ldots,a_0$ są liczbami a $f(\lambda)$ funkcją liczbową, równanie (1.1) może być traktowane jako zwykłe równanie różniczkowe o współczynnikach stałych; wobec tego teoria, którą tu naszkicujemy, może być uważana za uogólnienie klasycznej teorii tych ostatnich równań.

W rozdziale pierwszym omówimy równania jednorodne, to znaczy takie, w których funkcja $f(\lambda)$ jest tożsamościowo równa zeru.

§ 2. Równania charakterystyczne

Mając do rozwiązania równanie jednorodne

$$a_m x^{(m)} + \ldots + a_0 x = 0 \qquad (a_m \neq 0), \tag{2.1}$$

szukamy najpierw rozwiązań w postaci funkcyj wykładniczych $x = e^{\lambda u}$. W tym celu w równaniu (2.1) podstawiamy $x = e^{\lambda u}$

$$a_m u^m e^{\lambda u} + \ldots + a_0 e^{\lambda u} = 0;$$

ponieważ funkcja wykładnicza jest różna od zera dla każdego λ, możemy tę równość podzielić przez $e^{\lambda u}$. W ten sposób dochodzimy do równania

$$a_m u^m + \ldots + a_0 = 0, \tag{2.2}$$

które nazywamy *równaniem charakterystycznym* równania różniczkowego (2.1). Wielomian

$$P(u) = a_m u^m + \ldots + a_0$$

będziemy nazywali *wielomianem charakterystycznym*.

Nie każde równanie kształtu (2.2), gdzie $a_m, \ldots, a_0$ są dowolnymi operatorami, jest rozwiązalne, to znaczy nie zawsze istnieje operator u spełniający to równanie [1]). Rozważając równania różniczkowe będziemy stale zakładali, że ich równanie charakterystyczne ma m pierwiastków, to znaczy tyle, ile wynosi jego stopień; pierwiastki te nie koniecznie muszą być różne. Ściślej mówiąc, będziemy stale zakładali, że wielomian charakterystyczny $P(u)$ rozkłada się na m czynników liniowych

$$P(u) = a_m \prod_{\mu=1}^{m} (u - w_\mu) \tag{2.3}$$

(rozkład na takie czynniki jest zawsze jednoznaczny).

Założenie to jest usprawiedliwione o tyle, że we wszystkich zastosowaniach występują właśnie takie wielomiany, których rozkład na czynniki daje się efektywnie wykonać. Na przykład w przypadku równania ciepła $x'' - a^2 s x = 0$ wielomian charakterystyczny $u^2 - a^2 s$ rozkłada się na czynniki $(u + a\sqrt{s})(u - a\sqrt{s})$.

[1]) Przykład równania nierozwiązalnego nie jest łatwy i nie został dotąd opublikowany.

§ 3. O funkcjach wykładniczych

Gdy znamy już pierwiastki $w_1, \ldots, w_m$ równania charakterystycznego, należy utworzyć funkcje wykładnicze $e^{\lambda w_\mu}$. Tu pojawia się nowa trudność, gdyż funkcje takie nie zawsze istnieją. Może się mianowicie zdarzyć przy pewnych operatorach w, że jedynym rozwiązaniem równania różniczkowego $x' = wx$ jest funkcja identycznie równa zeru; wskutek tego warunek dodatkowy $x(0) = 1$, który ma spełniać każda funkcja wykładnicza, nie może być spełniony.

Na przykład nie istnieje funkcja wykładnicza $e^{i\lambda s}$ (λ rzeczywiste). Gdyby bowiem istniała, to przy odpowiednio dobranym operatorze $q \neq 0$ funkcja $y(\lambda) = q e^{i\lambda s}$ byłaby parametryczna

$$y(\lambda) = \{y(\lambda, t)\}$$

w przedziale $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ i spełniałaby w nim równanie $y'(\lambda) = isy(\lambda)$. Tym samym spełniałaby równanie $y''(\lambda) + s^2 y(\lambda) = 0$, lub co na jedno wychodzi, funkcja dwóch zmiennych $y(\lambda, t)$ spełniałaby równanie o pochodnych cząstkowych

$$y_{\lambda\lambda}(\lambda, t) + y_{tt}(\lambda, t) = 0 \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ 0 \leqslant t < \infty) \tag{3.4}$$

z warunkami początkowymi

$$y(\lambda, 0) = 0, \qquad y_t(\lambda, 0) = 0 \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1). \tag{3.5}$$

Funkcje, spełniające równanie (3.4) nazywają się *funkcjami harmonicznymi*. Z teorii tych funkcyj wiadomo, że o ile warunki (3.5) są spełnione, to $y(\lambda, t)$ jest identycznie równe zeru. Stąd $e^{i\lambda s} = y(\lambda)/q = 0$ w przedziale $[0, 1]$, co jest niemożliwe.

Nie istnieje więc funkcja wykładnicza $e^{i\lambda s}$. Symbol $e^{i\lambda s}$ nie ma wobec tego żadnego sensu, podobnie jak na przykład symbol $\frac{1}{0}$. Nonsensem byłoby mówić, że funkcja $e^{i\lambda s}$ jest identycznie równa zeru, gdyż warunek $x(0) = 1$ tkwi w definicji każdej funkcji wykładniczej.

Z nieistnienia $e^{i\lambda s}$ wynika, że nie istnieje też funkcja $e^{-i\lambda s}$. Gdyby bowiem istniała, to funkcja $x(\lambda) = \dfrac{1}{e^{-i\lambda s}}$ spełniałaby równanie $x'(\lambda) = isx(\lambda)$ z warunkiem $x(0) = 1$, byłaby więc funkcją wykładniczą $e^{i\lambda s}$.

Jeżeli istnieją funkcje wykładnicze $e^{\lambda w_1}$ i $e^{\lambda w_2}$ (λ rzeczywiste), to istnieje również funkcja wykładnicza $e^{\lambda(w_1+w_2)}$ i jest równa iloczynowi $e^{\lambda w_1}e^{\lambda w_2}$.

Istotnie, pisząc $x(\lambda)=e^{\lambda w_1}e^{\lambda w_2}$, mamy

$$x'(\lambda)=w_1e^{\lambda w_1}\cdot e^{\lambda w_2}+e^{\lambda w_1}\cdot w_2e^{\lambda w_2}=(w_1+w_2)e^{\lambda w_1}\cdot e^{\lambda w_2}$$

oraz $x(0)=1\cdot 1=1$, co dowodzi twierdzenia.

Jeżeli istnieje funkcja wykładnicza $e^{\lambda w}$ (λ rzeczywiste), to przy każdym a rzeczywistym funkcja $e^{\lambda a w}$ jest również wykładnicza.

Wynika to od razu z wzoru na różniczkowanie funkcji złożonej.

Z obydwu powyższych twierdzeń wynika, że *jeżeli istnieją funkcje wykładnicze $e^{\lambda w_1}$ i $e^{\lambda w_2}$, to przy wszelkich α_1 i α_2 rzeczywistych istnieje również funkcja wykładnicza $e^{\lambda(\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2)}$.*

Uwaga. Można by podjąć próby takiego uogólnienia pojęcia operatorów, żeby funkcja wykładnicza $e^{\lambda w}$ zawsze istniała. Jednakże właśnie fakt nieistnienia pewnych funkcyj wykładniczych przedstawia korzyści praktyczne i pozwala na przykład sklasyfikować równania cząstkowe w taki sposób, który ułatwia dobór metod ich rozwiązywania.

§ 4. Logarytmy

Operatory w, dla których istnieje funkcja wykładnicza $e^{\lambda w}$, będziemy nazywali *logarytmami*. Na przykład operatory s i $\sqrt{s}$ są logarytmami, operator zaś is nie jest logarytmem. Każda liczba zespolona jest logarytmem.

Z twierdzeń podanych w poprzednim paragrafie wynika, że *jeżeli w_1 i w_2 są logarytmami, α_1 i α_2 zaś dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to operator $\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2$ jest również logarytmem.*

Na przykład operatory

$$i+\sqrt{s}, \qquad 2s-3\sqrt{s}$$

są logarytmami.

Jeżeli w_1 jest logarytmem, w_2 zaś nie jest logarytmem, to operator $\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2$ ($\alpha_1,\alpha_2\neq 0$ liczby rzeczywiste) nigdy nie jest logarytmem. Istotnie, gdyby był logarytmem, to również operator

$$w_2=-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}w_1+\frac{1}{\alpha_2}(\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2)$$

byłby logarytmem, wbrew założeniu. Na przykład operatory

$$(1+i)s, \qquad \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}is, \qquad \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}is$$

nie są logarytmami.

Z rachunku wykonanego w paragrafie 2 wynika, że jeżeli pewien pierwiastek w_μ równania charakterystycznego (2.2) jest logarytmem, to funkcja wykładnicza $e^{\lambda w_\mu}$ spełnia równanie różniczkowe (2.1).

§ 5. Wielokrotne pierwiastki równania charakterystycznego

Pierwiastek w_μ równania (2.2) nazywamy $\varkappa$-krotnym, jeżeli wielomian $P(u)$ zawiera $\varkappa$ czynników postaci $u-w_\mu$. Na przykład operator $-s$ jest pierwiastkiem dwukrotnym równania

$$u^3+su^2-s^2u-s^3=0, \tag{5.1}$$

ponieważ $u^3+su^2-su^2-s^3=(u+s)^2(u-s)$. Natomiast pierwiastek s jest jednokrotny, ponieważ czynnik $u-s$ występuje tylko raz.

Jeżeli operator w_μ, będący logarytmem, jest $\varkappa$-krotnym pierwiastkiem równania (2.2), *to każda z funkcyj*

$$e^{\lambda w_\mu}, \quad \lambda e^{\lambda w_\mu}, \quad \ldots, \quad \lambda^{\varkappa-1}e^{\lambda w_\mu} \tag{5.2}$$

spełnia równanie (2.1).

Dowód. Jeżeli $x(\lambda)=\lambda^\sigma e^{\lambda w_\mu}$ (σ naturalne), to na podstawie twierdzenia Leibnitza o różniczkowaniu iloczynu mamy

$$x^{(k)}(\lambda)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(\lambda^\sigma)^{(j)}(e^{\lambda w_\mu})^{(k-j)}=$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{\sigma!}{(\sigma-j)!}\lambda^{\sigma-j}w_\mu^{k-j}e^{\lambda w_\mu}=$$

$$=e^{\lambda w_\mu}\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{(k-j)!}\binom{\sigma}{j}\lambda^{\sigma-j}w_\mu^{k-j},$$

gdzie należy przyjąć $\frac{\sigma!}{(\sigma-j)!}=0$ i $\binom{\sigma}{j}=0$, o ile $j>\sigma$.

Wobec tego

$$\sum_{k=0}^{m} a_k x^{(k)}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k e^{\lambda w_\mu} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!}\binom{\sigma}{j}\lambda^{\sigma-j} w_\mu^{k-j} =$$

$$= e^{\lambda w_\mu}\sum_{j=0}^{m}\binom{\sigma}{j}\lambda^{\sigma-j}\sum_{j=0}^{m} a_k \frac{k!}{(k-j)!} w_\mu^{k-j} =$$

$$= e^{\lambda w_\mu}\sum_{j=0}^{\sigma}\binom{\sigma}{j}\lambda^{\sigma-j}\sum_{k=0}^{m} a_k \frac{k!}{(k-j)!} w_\mu^{k-j}.$$

Z algebry wiadomo, że jeżeli wielomian $P(w) = \sum_{k=0}^{m} a_k u^k$ rozłożony na czynniki liniowe zawiera $\varkappa$ jednakowych czynników $u-w_\mu$, to jego j-ta pochodna $(0 \leqslant j \leqslant \varkappa-1)$

$$\sum_{k=j}^{m} a_k \frac{k!}{(k-j)!} u^{k-j}$$

jest równa zeru dla $u = w_\mu$. Jeżeli więc $0 \leqslant \sigma \leqslant \varkappa-1$, to mamy równość

$$\sum_{k=0}^{m} a_k x^{(k)}(\lambda) = 0$$

w całym rozważanym przedziale. Zatem funkcja $x(\lambda)$ spełnia równanie (2.1).

Przykład. Równanie

$$x''' + sx'' - s^2x' - s^3x = 0 \tag{5.3}$$

ma równanie charakterystyczne (5.1), dla którego operator $-s$ jest pierwiastkiem podwójnym. Wobec tego każda z funkcyj

$$e^{-\lambda s} \quad \text{i} \quad \lambda e^{-\lambda s}$$

spełnia równanie (5.3), co łatwo można sprawdzić przez podstawienie.

§ 6. Rozwiązanie ogólne

Zgodnie z udowodnionym twierdzeniem dla każdego pierwiastka w_μ, który jest logarytmem, można wypisać tyle rozwiązań (5.2), ile wynosi jego krotność. Jeżeli więc równanie charakterystyczne (2.2) ma ogółem p pierwiastków-logarytmów (liczonych według krotności), to możemy wypisać p rozwiązań; oznaczmy je przez

$$x_1(\lambda), \ldots, x_p(\lambda).$$

Jeżeli $c_1, \ldots, c_p$ są dowolnymi operatorami, to funkcja

$$x(\lambda) = c_1x_1(\lambda) + \ldots + c_px_p(\lambda) \tag{6.1}$$

jest również rozwiązaniem równania (2.1). Wyrażenie (6.1) nazywamy *rozwiązaniem ogólnym* równania (2.1); zawiera ono tyle stałych dowolnych, ile wynosi liczba pierwiastków-logarytmów równania charakterystycznego.

Przykłady. 1. Dla równania

$$x''' + sx'' - s^2x' - s^3x = 0$$

równaniem charakterystycznym jest

$$u^3 + su^2 - s^2u - s^3 = 0.$$

Ma ono jeden pierwiastek pojedynczy s i jeden podwójny $-s$; obydwa są logarytmami. Rozwiązanie ogólne zawiera więc trzy stałe dowolne i ma postać

$$x(\lambda) = c_1e^{\lambda s} + c_2e^{-\lambda s} + c_3\lambda e^{-\lambda s}.$$

2. Dla równania

$$x''' + sx'' + s^2x' + s^3x = 0$$

równaniem charakterystycznym jest

$$u^3 + su^2 + s^2u + s^3 = 0.$$

Ma ono trzy pierwiastki is, $-is$, oraz $-s$, z których tylko ostatni jest logarytmem. Wobec tego rozwiązanie ogólne zawiera jedną stałą dowolną

$$x(\lambda) = ce^{-\lambda s}.$$

3. Dla równania

$$x''+s^2x=0$$

mamy równanie charakterystyczne

$$u^2+s^2=0.$$

Żaden z jego pierwiastków is, $-is$ nie jest logarytmem. Wskutek tego rozwiązanie ogólne sprowadza się do postaci

$$x(\lambda)=0$$

i nie zależy od stałej.

W zależności od liczby pierwiastków-logarytmów będziemy rozróżniali trzy typy równań różniczkowych:

Równanie różniczkowe jest

logarytmiczne, gdy wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego są logarytmami;

czyste, gdy żaden z pierwiastków równania charakterystycznego nie jest logarytmem;

mieszane, gdy pewne pierwiastki równania charakterystycznego są logarytmami, inne zaś nie są logarytmami.

W przypadku, gdy współczynniki równania (2.1) są liczbami, mamy do czynienia z klasycznym równaniem różniczkowym o współczynnikach stałych. Jest ono logarytmiczne i dzięki temu rozwiązanie ogólne ma zawsze m stałych dowolnych, to znaczy tyle, ile wynosi rząd równania różniczkowego.

Na ogół jednak, jak widzieliśmy z podanych przykładów, liczba stałych dowolnych, występujących w rozwiązaniu ogólnym, może być mniejsza od rzędu równania.

Bardzo ważne jest twierdzenie, że *każde rozwiązanie równania* (2.1), *które istnieje w pewnym przedziale* (α,β), *daje się zawsze przez odpowiedni dobór stałych* $c_1,\dots,c_p$ *otrzymać z rozwiązania ogólnego.*

Dowód tego twierdzenia opiera się na pewnym twierdzeniu o jednoznaczności, które omówimy w następnym paragrafie.

Ćwiczenia. Napisać rozwiązania ogólne dla następujących równań różniczkowych:

(α) $x'''+4sx''+4s\,x'+16s^3x=0;$

(β) $x'''+s^3x=0;$

(γ) $x^{(4)}-s^4x=0;$

(δ) $sx'''+(s^2+s+1)(x''+x')+sx=0;$

(ε) $x^{(4)}+s^4x=0.$

§ 7. Twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań

Twierdzenie. *Jeżeli dane są operatory* $k_0,\dots,k_{m-1}$ *i pewien punkt* λ_0 *przedziału* (α,β), *to istnieje co najwyżej jedna funkcja operatorowa* $x(\lambda)$, *spełniająca w* (α,β) *równanie* (2.1) *i warunki*

$$x(\lambda_0)=k_0,\quad x'(\lambda_0)=k_1,\quad \dots,\quad x^{(m-1)}(\lambda_0)=k_{m-1}. \tag{7.1}$$

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją dwie takie funkcje $x_1(\lambda)$ i $x_2(\lambda)$. Wtedy ich różnica

$$x(\lambda)=x_1(\lambda)-x_2(\lambda)$$

spełnia również równanie (2.1) w przedziale (α,β) i warunki

$$x(\lambda_0)=0,\quad x'(\lambda_0)=0,\quad \dots,\quad x^{(m-1)}(\lambda_0)=0. \tag{7.2}$$

Wystarczy więc udowodnić, że każda funkcja $x(\lambda)$ spełniająca w (α,β) równanie (2.1) i warunki (7.2) jest równa zeru w (α,β).

W przypadku $m=0$ twierdzenie jest oczywiste; w przypadku $m=1$ udowodniliśmy je w paragrafie 17, cz. II. Prowadząc dowód przez indukcję, załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla równań rzędu $0,1,\dots,m-1$; wykażemy, że z tego wynika prawdziwość twierdzenia dla równań rzędu m.

Wprowadźmy funkcję pomocniczą

$$\begin{aligned} y(\lambda)=\sum_{i=0}^{m-1} a_i[&x^{(m-1)}(\lambda)x^{(i)}(\mu-\lambda)+\\ &+x^{(m-2)}(\lambda)x^{(i+1)}(\mu-\lambda)+\dots+x^{(i)}(\lambda)x^{(m-1)}(\mu-\lambda)], \end{aligned} \tag{7.3}$$

gdzie μ jest dowolnie ustaloną liczbą taką, że

$$\alpha<\mu-\lambda_0<\beta. \tag{7.4}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} y'(\lambda)&=\sum_{i=0}^{m-1} a_i[x^{(m)}(\lambda)x^{(i)}(\mu-\lambda)-x^{(i)}(\lambda)x^{(m)}(\mu-\lambda)]=\\ &=x^{(m)}(\lambda)\sum_{i=0}^{m-1} a_i x^{(i)}(\mu-\lambda)-x^{(m)}(\mu-\lambda)\sum_{i=0}^{m-1} a_i x^{(i)}(\lambda), \end{aligned}$$

Ale wobec (2.1) mamy

$$\sum_{i=0}^{m-1} a_i x^{(i)}(\lambda)=-a_m x^{(m)}(\lambda)$$

i, zastępując λ przez $\mu-\lambda$,

$$\sum_{i=0}^{m-1} a_i x^{(i)}(\mu-\lambda) = -a_m x^{(m)}(\mu-\lambda);$$

zatem

$$y'(\lambda) = -x^{(m)}(\lambda)\cdot a_m x^{(m)}(\mu-\lambda) + x^{(m)}(\mu-\lambda)\cdot a_m x^{(m)}(\lambda) = 0.$$

Równość ta zachodzi dla tych wartości λ z przedziału (α,β), przy których $\mu-\lambda$ należy również do (α,β), zachodzi więc w części wspólnej I przedziałów (α,β) i $(\mu-\beta,\mu-\alpha)$. Stąd wynika, że funkcja $y(\lambda)$ jest stała w I. Ponieważ punkt λ_0 należy do I i ponieważ z warunków (7.2) wynika, że $y(\lambda_0)=0$, więc musi być $y(\lambda)=0$ tożsamościowo w I, to znaczy musi być

$$\sum_{i=0}^{m-1} a_i[x^{(m-1)}(\lambda)x^{(i)}(\mu-\lambda) + x^{(m-2)}(\lambda)x^{(i+1)}(\mu-\lambda) + \ldots + x^{(i)}(\lambda)x^{(m-1)}(\mu-\lambda)] = 0, \tag{7.5}$$

o ile tylko są spełnione nierówności (7.4)

$$\alpha<\lambda<\beta \quad \text{i} \quad \alpha<\mu-\lambda<\beta.$$

Podstawiając $\varkappa=\mu-\lambda$ w (7.5) i wyciągając przed znak sumy wyrazy zawierające pochodną $x^{(m-1)}(\lambda)$, otrzymamy

$$[a_{m-1}x^{(m-1)}(\varkappa)+\ldots+a_0x(\varkappa)]x^{(m-1)}(\lambda) + \sum_{i=0}^{m-1} a_i[x^{(m-2)}(\lambda)x^{(i-1)}(\varkappa)+\ldots+x^{(i)}(\lambda)x^{(m-1)}(\varkappa)] = 0; \tag{7.6}$$

równość ta jest spełniona, o ile tylko

$$\alpha<\varkappa<\beta, \quad \alpha<\lambda<\beta \quad \text{i} \quad \alpha<\varkappa-\lambda_0+\lambda<\beta. \tag{7.7}$$

Niech $\bar\lambda$ będzie dowolnym punktem wewnątrz przedziału (α,β); udowodnimy, że $x(\bar\lambda)=0$. Rozróżnimy w tym celu dwa przypadki:

1. W każdym otoczeniu punktu λ_0 istnieją wartości $\varkappa$, dla których

$$a_{m-1}x^{(m-1)}(\varkappa)+\ldots+a_0x(\varkappa)\neq 0.$$

Spośród tych wartości wybieramy taką, żeby $|\varkappa-\lambda_0|$ było mniejsze od każdej z liczb

$$\lambda_0-\alpha, \quad \bar\lambda-\alpha, \quad \beta-\lambda_0 \quad \text{i} \quad \beta-\bar\lambda.$$

Wtedy jest

$$\alpha+|\varkappa-\lambda_0|<\lambda_0<\beta-|\varkappa-\lambda_0|$$

i

$$\alpha+|\varkappa-\lambda_0|<\bar\lambda<\beta-|\varkappa-\lambda_0|.$$

Jeżeli λ należy do przedziału

$$\alpha+|\varkappa-\lambda_0|<\lambda<\beta-|\varkappa-\lambda_0|, \tag{7.8}$$

to są spełnione nierówności (7.7). Wobec tego równanie (7.6) jest spełnione dla wszystkich λ z przedziału (7.8); jest to równanie rzędu $m-1$, gdyż współczynnik przy najwyższej pochodnej $x^{(m-1)}(\lambda)$ jest różny od zera. Ponieważ punkt λ_0 należy do przedziału (7.8) i w punkcie tym są spełnione równości

$$x_0(\lambda_0)=0, \quad \ldots, \quad x^{(m-2)}(\lambda_0)=0, \tag{7.9}$$

więc na podstawie założenia indukcyjnego, że twierdzenie jest prawdziwe dla równań rzędu $\leqslant m-1$, wynika, że $x(\lambda)=0$ dla każdego λ z przedziału (7.8). Ale punkt $\bar\lambda$ należy do tego przedziału, mamy więc w szczególności $x(\bar\lambda)=0$, co chcieliśmy udowodnić.

2. Istnieje takie otoczenie punktu λ_0, że dla wszystkich $\varkappa$ należących do tego otoczenia jest

$$a_{m-1}x^{(m-1)}(\varkappa)+\ldots+a_0x(\varkappa)=0.$$

Załóżmy na razie, że co najmniej jeden ze współczynników $a_{m-1},\ldots,a_0$ jest różny od zera, i oznaczmy przez (α_0,β_0) największy przedział (zawierający punkt λ_0), w którym ta równość jest spełniona. Wówczas z równości (7.9) i założenia indukcyjnego wynika, że $x(\lambda)=0$ w przedziale (α_0,β_0). Jeżeli $\bar\lambda$ jest poza przedziałem (α_0,β_0), to można ustalić λ_1 z przedziału (α_0,β_0) i $\varkappa$ poza tym przedziałem, tak żeby równość (7.6) zachodziła wewnątrz pewnego przedziału zawierającego punkty λ i $\bar\lambda$. Ponieważ $x(\lambda_1)=0$, więc podobnie jak w przypadku 1 musi być $x(\bar\lambda)=0$.

Pozostaje jeszcze uwolnić się od założenia, że co najmniej jeden ze współczynników $a_{m-1},\ldots,a_0$ jest różny od zera. Ale gdy wszystkie są równe zeru, to równanie (2.1) redukuje się (po podzieleniu przez a_m) do postaci $x^{(m)}(\lambda)=0$. Zatem funkcja $x^{(m-1)}(\lambda)$ musi być stała w (α,β). Ponieważ $x^{(m-1)}(\lambda_0)=0$, więc jest wszędzie $x^{(m-1)}(\lambda)=0$ w (α,β). Stąd przez indukcję jest $x(\lambda)=0$ w (α,β). W ten sposób dowód twierdzenia jest zakończony.

§ 8. Równanie logarytmiczne

W przypadku równania logarytmicznego wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego są logarytmami i rozwiązanie ogólne zawiera m stałych dowolnych

$$x(\lambda) = c_1 x_1(\lambda) + \ldots + c_m x_m(\lambda).$$

Mając dowolnie zadane operatory $k_0, \ldots, k_{m-1}$ i pewien punkt λ_0 można dobrać stałe $c_1, \ldots, c_m$ w ten sposób, żeby były spełnione warunki (7.1). Wystarczy w tym celu rozwiązać względem $c_1, \ldots, c_m$ układ równań

$$\begin{aligned} c_1 x_1(\lambda_0) &+ \ldots + c_m x_m(\lambda_0) &&= k_0, \\ c_1 x_1'(\lambda_0) &+ \ldots + c_m x_m'(\lambda_0) &&= k_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1 x_1^{(m-1)}(\lambda_0) &+ \ldots + c_m x_m^{(m-1)}(\lambda_0) &&= k_{m-1}. \end{aligned}$$

Dla rozwiązalności tego układu potrzeba i wystarcza, żeby wyznacznik

$$\begin{vmatrix} x_1(\lambda_0) & \ldots & x_m(\lambda_0) \\ x_1'(\lambda_0) & \ldots & x_m'(\lambda_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(m-1)}(\lambda_0) & \ldots & x_m^{(m-1)}(\lambda_0) \end{vmatrix} \tag{8.1}$$

był różny od zera. Łatwo sprawdzić, że wyznacznik jest różny od zera w przypadku, gdy wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego są różne. Wtedy bowiem jest

$$x_1(\lambda) = e^{\lambda w_1}, \quad \ldots, \quad x_m(\lambda) = e^{\lambda w_m}$$

i wyznacznik (8.1) ma postać

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_0 w_1} & \ldots & e^{\lambda_0 w_m} \\ w_1 e^{\lambda_0 w_1} & \ldots & w_m e^{\lambda_0 w_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ w_1^{m-1} e^{\lambda_0 w_1} & \ldots & w_m^{m-1} e^{\lambda_0 w_m} \end{vmatrix} = e^{\lambda_0(w_1 + \ldots + w_m)} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ w_1 & \ldots & w_m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ w_1^{m-1} & \ldots & w_m^{m-1} \end{vmatrix};$$

ostatni wyznacznik, zwany *wyznacznikiem Vandermonde'a*, jest jak wiadomo różny od zera, o ile tylko wszystkie elementy $w_1, \ldots, w_m$ są różne.

Gdy nie wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego są różne, to wśród funkcyj $x_1(\lambda), \ldots, x_m(\lambda)$ będą niektóre postaci $\lambda^{\varkappa} e^{w_\nu \lambda}$, gdzie $\varkappa \geqslant 1$. Wtenczas obliczenie wyznacznika (8.1) jest bardziej skomplikowane, jednak i w tym przypadku wyznacznik jest zawsze różny od zera [1]).

Jeżeli teraz $x_0(\lambda)$ jest jakąkolwiek funkcją spełniającą w pewnym przedziale równanie (2.1), to zawsze można dobrać współczynniki $c_1, \ldots, c_m$ w ten sposób, żeby dla pewnego punktu λ_0 przedziału (α, β) było

$$x(\lambda_0) = x_0(\lambda_0), \quad \ldots, \quad x^{(m-1)}(\lambda_0) = x_0^{(m-1)}(\lambda_0).$$

Ale wtedy na podstawie twierdzenia o jednoznaczności obie funkcje $x(\lambda)$ i $x_0(\lambda)$ muszą być identyczne w całym rozważanym przedziale. Jeżeli więc równanie jest logarytmiczne, to każde jego rozwiązanie można otrzymać przez podstawienie w rozwiązaniu ogólnym odpowiednich wartości na stałe $c_1, \ldots, c_m$.

W celu udowodnienia analogicznego twierdzenia dla równań, które nie są logarytmiczne, zajmiemy się najpierw pewnymi własnościami wyrażeń różniczkowych liniowych.

§ 9. Wyrażenia różniczkowe liniowe

Oznaczmy lewą stronę równania różniczkowego (2.1) przez Lx

$$Lx = \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu x^{(\mu)}; \tag{9.1}$$

symbol Lx będziemy nazywali *wyrażeniem różniczkowym liniowym*. Jeżeli w takim wyrażeniu podstawimy za x pewną funkcję operatorową $x(\lambda)$ (mającą m-tą pochodną ciągłą), to $Lx(\lambda)$ będzie przedstawiało funkcję operatorową ciągłą.

Jeżeli $Lx(\lambda) = 0$ tożsamościowo w pewnym przedziale, to stąd wynika, że funkcja $x(\lambda)$ ma nieskończenie wiele pochodnych w tym przedziale. Istotnie, możemy wtedy napisać

$$x^{(m)}(\lambda) = -\frac{1}{a_m} \sum_{\mu=0}^{m-1} a_\mu x^{(\mu)}(\lambda); \tag{9.2}$$

---

[1]) Mikusiński [30], [34].

ponieważ po prawej stronie występują pochodne tylko do rzędu $m-1$, więc pochodna ciągła istnieje dla prawej strony i tym samym dla lewej:

$$x^{(m+1)}(\lambda) = -\frac{1}{a_m}\sum_{\mu=0}^{m-1} a_\mu x^{(\mu+1)}(\lambda). \tag{9.3}$$

Pochodną $x^{(m)}(\lambda)$ występującą teraz po prawej stronie wzoru (9.3) można zastąpić przez wyrażenie (9.2); w ten sposób pochodna $x^{(m+1)}(\lambda)$ wyrazi się przez same pochodne rzędu niższego niż m. Wskutek tego $x^{(m+1)}(\lambda)$ znowu da się zróżniczkować. Powtarzając te same kroki odpowiednią ilość razy, możemy dojść do pochodnych dowolnie wysokiego rzędu. Funkcja $x(\lambda)$ jest więc nieskończenie wiele razy różniczkowalna.

Jeżeli $Lx(\lambda)=0$ tożsamościowo w pewnym przedziale, to również $Lx^{(n)}(\lambda)=0$ tożsamościowo w tym przedziale, jakiekolwiek weźmiemy n naturalne. Wynika to od razu z oczywistej równości $Lx^{(n)}(\lambda)=[Lx(\lambda)]^{(n)}$. Jeżeli więc $x(\lambda)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego jednorodnego $Lx=0$, czyli równania

$$a_m x^{(m)} + \ldots + a_0 x = 0,$$

to każda pochodna $x^{(n)}(\lambda)$ jest również rozwiązaniem tego równania.

§ 10. Działania na wyrażeniach różniczkowych liniowych

Przez sumę $(L_1+L_2)x$ dwóch wyrażeń liniowych L_1x i L_2x rozumiemy wyrażenie L_1x+L_2x. Jeżeli więc na przykład

$$\begin{aligned} L_1x &= a_2x''+a_1x'+a_0x, \\ L_2x &= b_1x'+b_0x, \end{aligned} \tag{10.1}$$

to

$$(L_1+L_2)x = a_2x''+(a_1+b_1)x'+(a_0+b_0)x.$$

Przez iloczyn L_1L_2x dwóch wyrażeń liniowych rozumiemy wyrażenie $L_1(L_2x)$. Na przykład, jeżeli przyjmiemy (10.1), to

$$\begin{aligned} L_1L_2x &= a_2(L_2x)''+a_1(L_2x)'+a_0(L_2x) = \\ &= a_2(b_1x'''+b_0x'') + a_1(b_1x''+b_0x') + a_0(b_1x'+b_0x) = \\ &= a_0b_1x'''+(a_2b_0+a_1b_1)x''+(a_1b_0+a_0b_1)x'+a_0b_0x. \end{aligned}$$

§ 11. Wielomiany charakterystyczne wyrażeń różniczkowych liniowych

Z każdym wyrażeniem liniowym (9.1) jest związany wielomian charakterystyczny

$$P(u) = \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu u^\mu.$$

Na przykład wielomianami charakterystycznymi dla wyrażeń (10.1) są

$$P_1(u) = a_2u^2+a_1u+a_0 \quad \text{i} \quad P_2(u) = b_1u+b_0.$$

Widać od razu, że suma

$$P_1(u)+P_2(u) = a_2u^2+(a_1+b_1)u+(a_0+b_0)$$

jest wielomianem charakterystycznym dla sumy $(L_1+L_2)x$. Podobnie iloczyn

$$P_1(u)\cdot P_2(u) = a_2b_1u^3+(a_2b_0+a_1b_1)u^2+(a_1b_0+a_0b_1)u+a_0b_0$$

jest wielomianem charakterystycznym dla iloczynu L_1L_2x.

Jest to prawidło ogólne: *Wielomianem charakterystycznym dla sumy wyrażeń różniczkowych liniowych jest suma ich wielomianów charakterystycznych*. Podobnie, *wielomianem charakterystycznym dla iloczynu wyrażeń różniczkowych liniowych jest iloczyn ich wielomianów charakterystycznych*. Prawidło to pozwala wykonywać działania na wyrażeniach różniczkowych liniowych podobnie jak na wielomianach.

Z twierdzenia tego wynika w szczególności, że każde wyrażenie liniowe (9.1) daje się napisać w postaci

$$Lx = a_0L_1\ldots L_mx,$$

gdzie $L_\mu x = x'-w_\mu x$, a w_μ jest pierwiastkiem równania charakterystycznego $P(u)=0$.

§ 12. Równania czyste

Jeżeli równanie $Lx=0$ jest czyste, to każde z równań

$$L_1x=0, \quad \ldots, \quad L_mx=0$$

ma tylko jedno rozwiązanie, mianowicie identycznie równe zeru. Gdy $x(\lambda)\not\equiv 0$, to $L_mx(\lambda)\not\equiv 0$. Stąd wynika kolejno, że $L_{m-1}L_mx(\lambda)\not\equiv 0$, $L_{m-2}L_{m-1}L_mx(\lambda)\not\equiv 0$ i wreszcie, że $L_1\ldots L_mx(\lambda)\not\equiv 0$. Zatem $Lx(\lambda)\not\equiv 0$; żadna funkcja $x(\lambda)\not\equiv 0$ nie spełnia równania $Lx=0$.

Mamy więc twierdzenie:

Równania czyste (jednorodne) mają tylko rozwiązania identycznie równe zeru.

§ 13. Równania mieszane

Możemy łatwo teraz udowodnić, że każde rozwiązanie równania *mieszanego* $Lx=0$ daje się otrzymać z rozwiązania ogólnego przez odpowiedni dobór stałych $c_1,\dots,c_p$. Jeżeli p jest liczbą pierwiastków-logarytmów równania charakterystycznego, to można przyjąć, że równania

$$L_1x=0,\quad \dots,\quad L_px=0$$

mają rozwiązania niezerowe, równania zaś

$$L_{p+1}x=0,\quad \dots,\quad L_mx=0$$

ich nie mają. Wprowadźmy oznaczenia

$$L_{\log}x = L_1\dots L_px,\qquad L_{cz}x=L_{p+1}\dots L_mx.$$

Wtedy równanie

$$L_{\log}x=0$$

jest logarytmiczne i każde jego rozwiązanie ma postać

(13.1) $$c_1x_1(\lambda)+\dots+c_px_p(\lambda);$$

znaczenie funkcyj $x_1(\lambda),\dots,x_p(\lambda)$ było omówione w paragrafie 6. Równanie zaś

(13.2) $$L_{cz}x=0$$

jest czyste i ma jedyne rozwiązanie równe identycznie zeru.

Równanie $Lx=0$ można napisać w postaci

$$L_{cz}L_{\log}x=0.$$

Jeżeli funkcja $x(\lambda)$ nie jest kształtu (13.1), to $L_{\log}x\not\equiv 0$. W konsekwencji musi być $L_{cz}L_{\log}x(\lambda)\not\equiv 0$ i funkcja $x(\lambda)$ nie może spełniać równania $Lx=0$. Zatem każde rozwiązanie równania $Lx=0$ ma postać (13.1).

§ 14. Dostosowanie rozwiązania do danych warunków początkowych, brzegowych i innych

Udowodniliśmy, że dla równania różniczkowego (2.1) dowolnego typu każde rozwiązanie można otrzymać z rozwiązania ogólnego przez odpowiednie dobranie stałych c_μ. Rozwiązanie ogólne można dostosowywać do różnych warunków dodatkowych.

Przykład 1. Należy znaleźć funkcję $x(\lambda)$ spełniającą równanie

(14.1) $$x'''+sx''-s^2x'-s^3x=0$$

oraz warunki

(14.2) $$x(0)=1,\qquad x'(0)=s-1,\qquad x''(0)=s^2+2s.$$

Rozwiązanie ogólne tego równania ma, jak widzieliśmy w paragrafie 6, postać

$$x(\lambda)=c_1e^{\lambda s}+(c_2+c_3\lambda)e^{-\lambda s}.$$

Stąd

$$x'(\lambda)=c_1se^{\lambda s}+(-c_2s+c_3-c_3\lambda s)e^{-\lambda s},$$
$$x''(\lambda)=c_1s^2e^{\lambda s}+(c_2s^2-2c_3s+c_3\lambda s^2)e^{-\lambda s}.$$

Przyjmując $\lambda=0$ i wykorzystując warunki (14.2), dochodzimy do równości

$$c_1+c_2=1,$$
$$c_1s-c_2s+c_3=s-1,$$
$$c_1s^2+c_2s^2-2c_3s=s^2+2s.$$

Stąd łatwo wyliczamy

$$c_1=1,\qquad c_2=0\quad\text{i}\quad c_3=-1.$$

Zatem szukane rozwiązanie ma postać

$$x(\lambda)=e^{s\lambda}-\lambda e^{-\lambda s}.$$

Przykład 2. Należy znaleźć funkcję $x(\lambda)$, spełniającą równanie różniczkowe (14.1) oraz warunki

(14.3) $$x(0)=-\frac{1}{s},\qquad x'(0)=1+\frac{1}{s},\qquad x(1)=0.$$

W podobny sposób jak poprzednio warunki te prowadzą do równości

$$c_1 + c_2 = -\frac{1}{s},$$
$$c_1 s - c_2 s + c_3 = 1 + \frac{1}{s},$$
$$c_1 e^s + (c_2 + c_3)\, e^{-s} = 0.$$

Stąd

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = -\frac{1}{s}, \qquad c_3 = \frac{1}{s}$$

i szukane rozwiązanie

$$x(\lambda) = \frac{1}{s}(\lambda - 1)\, e^{-\lambda s}.$$

Przykład 3. Należy znaleźć funkcję $x(\lambda)$ spełniającą równanie (14.1) oraz warunki

$$x(0) = 0, \qquad x(1) = 0, \qquad x(2) = 1.$$

Mamy teraz do rozwiązania układ równań

$$c_1 + c_2 = 0,$$
$$c_1 e^s + c_2 e^{-s} + c_3 e^{-s} = 0,$$
$$c_1 e^{2s} + c_2 e^{-2s} + 2c_3 e^{-2s} = 1;$$

znajdujemy w ten sposób

$$c_1 = \frac{1}{(e^s - e^{-s})^2}, \qquad c_2 = -\frac{1}{(e^s - e^{-s})^2}, \qquad c_3 = \frac{1}{e^{-2s} - 1}$$

i ostatecznie

$$x(\lambda) = \frac{e^{\lambda s} - e^{-\lambda s}}{(e^s - e^{-s})^2} + \frac{\lambda e^{-\lambda s}}{e^{-2s} - 1}.$$

Warunki podane w przykładzie pierwszym nazywają się *warunkami początkowymi*, warunki zaś w przykładzie drugim *warunkami brzegowymi*. Inny typ warunków podany jest w przykładzie trzecim. We wszystkich tych przykładach znalezione rozwiązanie jest jedyne, gdyż stałe c_1, c_2, c_3 są określone w sposób jednoznaczny.

Dla jednoznacznego określenia rozwiązania potrzeba tylu warunków, ile wynosi liczba stałych dowolnych w rozwiązaniu ogólnym. W powyższych przykładach były zawsze podane trzy warunki.

Równanie rozważane w tych przykładach jest logarytmiczne. W logarytmicznych równaniach potrzeba zawsze tylu warunków, ile wynosi rząd równania. Jeżeli równanie nie jest logarytmiczne, to liczba warunków wyznaczających rozwiązanie jest mniejsza od rzędu równania i równa liczbie pierwiastków-logarytmów równania charakterystycznego lub, co na jedno wychodzi, liczbie stałych w rozwiązaniu ogólnym.

Przykład 4. Należy znaleźć funkcję $x(\lambda)$ spełniającą równanie

$$x''' + sx'' + s^2 x' + s^3 x = 0$$

i warunek

$$x(1) = s.$$

Rozwiązanie ogólne zawiera teraz jedną stałą dowolną (zob. § 6)

$$x(\lambda) = c e^{-\lambda s};$$

wyznaczamy ją z łatwością przez uwzględnienie zadanego warunku, który prowadzi do równania

$$c e^{-s} = s.$$

Stąd $c = s e^s$ i szukane rozwiązanie

$$x(\lambda) = s e^{(1-\lambda)s}.$$

Ćwiczenia. Rozwiązać następujące równania przy zadanych warunkach:

(α) $x''' + 4s x'' + 4s^2 x' + 16 s^3 x = 0, \quad x(0) = \frac{1}{s};$

(β) $x''' + s^3 x = 0, \quad x(1) = 1;$

(γ) $x^{(4)} - s^4 x = 0, \quad x(0) = x(1) = s;$

(δ) $s x''' + (s^2 + s + 1)(x'' + x') + s x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1 - \frac{2}{s}, \quad x(-1) = 2e^{1/s} - e.$

Czy znalezione rozwiązania są jedyne?

ROZDZIAŁ II

Równania niejednorodne

§ 15. Ogólne rozwiązanie równania niejednorodnego

Jeżeli funkcje $x_0(\lambda)$ i $x_1(\lambda)$ spełniają *równanie niejednorodne*

$$a_m x^{(m)} + \ldots + a_0 x = f(\lambda), \tag{15.1}$$

to ich różnica $x(\lambda) = x_0(\lambda) - x_1(\lambda)$ spełnia równanie jednorodne

$$a_m x^{(m)} + \ldots + a_0 x = 0. \tag{15.2}$$

Gdy więc znamy choć jedną funkcję $x_0(\lambda)$ spełniającą równanie (15.1), to wystarczy znaleźć rozwiązanie ogólne

$$x(\lambda) = c_1 x_1(\lambda) + \ldots + c_p x_p(\lambda)$$

równania (15.2); wtedy mamy też od razu rozwiązanie ogólne równania (15.1) w postaci sumy

$$x_0(\lambda) + x(\lambda) = x_0(\lambda) + c_1 x_1(\lambda) + \ldots + c_p x_p(\lambda). \tag{15.3}$$

Każde rozwiązanie szczególne równania (15.1) można otrzymać z (15.3) przez odpowiedni dobór stałych $c_1, \ldots, c_p$.

Na przykład dla równania niejednorodnego

$$x''' + s x'' - s^2 x' - s^3 x = -1 \tag{15.4}$$

możemy łatwo napisać rozwiązanie ogólne, korzystając z rozwiązania podanego w poprzednim paragrafie i z prostej uwagi, że funkcja $x_0(\lambda) = \frac{1}{s^3}$ spełnia równanie (15.4). Rozwiązanie ogólne ma więc

w tym przypadku postać

$$x(\lambda) = \frac{1}{s^3} + c_1 e^{-\lambda s} + c_2 \lambda e^{-\lambda s} + c_3 e^{\lambda s}.$$

Natomiast równanie

$$x'' + s^2 x = 1$$

ma jedno jedyne rozwiązanie

$$x(\lambda) = \frac{1}{s^2},$$

gdyż jedyną funkcją spełniającą równanie jednorodne $x'' + s^2 x = 0$ jest funkcja identycznie równa zeru.

Rozwiązanie równania niejednorodnego sprowadza się więc zawsze do rozwiązania równania jednorodnego i do znalezienia choć jednej funkcji spełniającej równanie niejednorodne. Znalezienie tej funkcji jest na ogół trudne, a w pewnych przypadkach może się zdarzyć, że funkcja taka nie istnieje[1]). W innych przypadkach, gdy prawa strona równania (15.1) jest specjalnej postaci, znalezienie rozwiązania może być łatwe.

§ 16. Przypadek, gdy prawa strona jest wielomianem

Mając równanie

$$a_m x^{(m)} + \ldots + a_0 x = b_0 + \ldots + b_n \lambda^n \qquad (a_0 \neq 0) \tag{16.1}$$

możemy zawsze znaleźć rozwiązanie wielomienne

$$x_0(\lambda) = c_0 + \ldots + c_n \lambda^n.$$

Wystarczy podstawić to wyrażenie do (16.1) i następnie wyznaczyć $c_0, \ldots, c_n$ przez porównanie współczynników przy potęgach λ. Znaleziony w ten sposób wielomian jest jedynym wielomianem spełniającym równanie (16.1).

Wyznaczmy dla przykładu rozwiązanie wielomienne dla równania

$$x'' + s^2 x = s\lambda^3 + 1. \tag{16.2}$$

[1]) Mikusiński [30], str. 233-234.

Podstawiając wyrażenie

$$x(\lambda)=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+c_3\lambda^3$$

do (16.2), mamy

$$(28c_2+6c_3\lambda)+s^2(c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+c_3\lambda^3)=s\lambda^3+1,$$

a stąd przez porównanie współczynników

$$\begin{aligned} 2c_2+s^2c_0&=1,\\ 6c_3+s^2c_1&=0,\\ s^2c_2&=0,\\ s^2c_3&=s. \end{aligned}$$

Z równań tych wyliczamy z łatwością

$$c_0=\frac{1}{s^2},\qquad c_1=-\frac{6}{s^3},\qquad c_2=0,\qquad c=\frac{1}{s};$$

zatem szukane rozwiązanie ma postać

$$x_0(\lambda)=\frac{1}{s^2}-\frac{6\lambda}{s^3}+\frac{\lambda^3}{s}.$$

Jest to w ogóle jedyne rozwiązanie równania (16.2), gdyż ogólne rozwiązanie równania jednorodnego $x''+s^2x=0$ redukuje się do zera.

Jeżeli w równaniu (16.1) jest $a_0=0$, to oznaczając przez a_k ostatni współczynnik różny od zera, będziemy mieli rozwiązanie wielomienne postaci

$$x_0(\lambda)=c_0\lambda^k+\ldots+c_n\lambda^{k+n},$$

którego współczynniki wyznaczamy podobnie jak w poprzednim przypadku. Nie jest to jednak jedyne rozwiązanie wielomienne, gdyż można do niego dodać albo odjąć dowolny wielomian stopnia mniejszego od k, otrzymując w ten sposób inne rozwiązania wielomienne.

Ćwiczenia. Znaleźć rozwiązania wielomienne dla równań:

(α) $x^{(4)}+sx=a\lambda+b$;

(β) $x''-sx'+s^2x=s\lambda^3$;

(γ) $x^{(4)}+s^2x''=2\lambda^2+1$.

§ 17. Przypadek, gdy prawa strona jest funkcją wykładniczą

Jeżeli mamy równanie

$$a_mx^{(m)}+\ldots+a_0x=e^{\lambda w}, \tag{17.1}$$

gdzie w jest operatorem, takim że $a_mw^m+\ldots+a_0=P(w)\neq 0$, to możemy od razu podać jedno z jego rozwiązań. Jest nim faunkcj

$$x_0(\lambda)=\frac{e^{\lambda w}}{P(w)},$$

co łatwo sprawdzić przez podstawienie.

Na przykład dla równania

$$x'''+sx''+s^2x'+s^3x=e^{\lambda} \tag{17.2}$$

rozwiązaniem jest funkcja

$$x_0(\lambda)=\frac{e^{\lambda}}{1+s+s^2+s^3}.$$

Jeżeli $P(w)=0$, to w jest pierwiastkiem równania charakterystycznego; niech q będzie krotnością tego pierwiastka. Wtedy funkcja

$$x_0(\lambda)=\frac{\lambda^q e^{\lambda w}}{P^{(q)}(w)} \tag{17.3}$$

spełnia równanie (17.1); $P^{(q)}$ oznacza q-tą pochodną wielomianu P.

Na przykład dla równania

$$x'''+sx''-s^2x'-s^3x=e^{-\lambda s} \tag{17.4}$$

wielomian $P(u)$ ma postać

$$P(u)=u^3+su^2-s^2u-s^3.$$

Stwierdzamy łatwo, że $P(-s)=0$ i że $-s$ jest pierwiastkiem dwukrotnym równania charakterystycznego $P(u)=0$. Zatem funkcja

$$x_0(\lambda)=\frac{\lambda^2e^{-s\lambda}}{(P''-s)}$$

spełnia równanie (17.4); ponieważ

$$P''(u) = 6u + 2s,$$
$$P''(-s) = -4s,$$

więc mamy ostatecznie

$$x_0(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{4s} e^{-\lambda s}.$$

Łatwo sprawdzić przez bezpośrednie podstawienie, że funkcja ta rzeczywiście jest rozwiązaniem równania.

Dla udowodnienia w ogólnym przypadku, że funkcja (17.3) spełnia równanie (17.1), zauważmy, że w myśl rachunków wykonanych w paragrafie 5 mamy

$$\sum_{k=0}^{m} a_k x_0^{(k)}(\lambda) = \frac{e^{\lambda w}}{P^{(q)}(w)} \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} \lambda^{q-1} \sum_{k=j}^{m} a_k \frac{k!}{(k-j)!} w^{k-j} =$$
$$= \frac{e^{\lambda w}}{P^{(q)}(w)} \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} \lambda^{q-j} P^{(j)}(w).$$

Z założenia, że w jest pierwiastkiem q-krotnym, wynika, jak wiadomo z algebry, że $P^{(j)}(w) = 0$ dla $j = 0, \ldots, q-1$. Wskutek tego ostatnia suma redukuje się do jednego tylko, mianowicie ostatniego wyrazu i po uproszczeniu pozostaje po prawej stronie równości $e^{\lambda w}$. A to dowodzi twierdzenia.

Ćwiczenia. Podać rozwiązania szczególne dla następujących równań:

(α) $x'' + sx' + s^2 x = e^{-\lambda s}$;

(β) $x'' + 2sx' + s^2 x = e^{-\lambda s}$;

(γ) $x'' + 3sx' + 2s^2 x = e^{-\lambda s}$.

§ 18. Przypadek, gdy prawa strona jest iloczynem wielomianu i funkcji wykładniczej

Przypadek ten obejmuje obydwa rozważane poprzednio:

$$a_m x^{(m)} + \ldots + a_0 x = (b_0 + \ldots + b_n \lambda^n) e^{\lambda w}.$$

Można udowodnić, że jeżeli w jest pierwiastkiem q-krotnym równania charakterystycznego, to istnieje zawsze rozwiązanie postaci

$$x_0(\lambda) = (c_0 \lambda^q + \ldots + c_n \lambda^{q+n}) e^{\lambda w}.$$

W praktyce stałe $c_0, \ldots, c_n$ wyznaczamy przez porównanie współczynników przy równych potęgach λ. Na przykład, mając do rozwiązania równanie

$$x''' + sx'' - s^2 x' - s^3 x = \lambda e^{\lambda s}, \tag{18.1}$$

szukamy rozwiązania postaci

$$x_0(\lambda) = (c_0 \lambda + c_1 \lambda^2) e^{\lambda s},$$

ponieważ $n=1$ i $q=1$ (gdyż s jest pierwiastkiem pojedynczym równania charakterystycznego). Podstawiając $x_0(\lambda)$ do (18.1) mamy

$$[3c_0 s^2 + 6c_1 s + (c_0 s^3 + 6c_1 s^2)\lambda + c_1 s^3 \lambda^2] e^{\lambda s} +$$
$$+ s[2c_0 s + 2c_1 + (c_0 s^2 + 4c_1 s)\lambda + c_1 s^2 \lambda^2] e^{\lambda s} -$$
$$- s^2[c_0 + (c_0 s + 2c_1)\lambda + c_1 s \lambda^2] e^{\lambda s} - s^3(c_0 \lambda + c_1 \lambda^2) e^{\lambda s} = \lambda e^{\lambda s}.$$

Dzieląc tę równość przez $e^{\lambda s}$ i porównując współczynniki przy równych potęgach λ, znajdujemy związki:

$$4c_0 s^2 + 8c_1 s = 0,$$
$$8c_1 s^2 = 1,$$

a stąd

$$c_0 = -\frac{1}{4s^3}, \qquad c_1 = \frac{1}{8s^2}.$$

Szukanym rozwiązaniem jest więc funkcja

$$x_0(\lambda) = \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda^2}{s^2} - \frac{2\lambda}{s^3}\right) e^{\lambda s}.$$

Ćwiczenia. Znaleźć po jednym rozwiązaniu szczególnym dla następujących równań:

(α) $x^{(4)} - 2sx'' + s^2 x = \lambda^2 e^{-\lambda s}$;

(β) $x^{(4)} - 2sx'' + s^2 x = \lambda^2 e^{-\lambda \sqrt{s}}$.

§ 19. Przypadek, gdy prawa strona jest kombinacją liniową dwóch funkcyj

Gdy równanie jest postaci

$$a_m x^{(m)} + \ldots + a_0 x = b_1 f_1(\lambda) + b_2 f_2(\lambda), \tag{19.1}$$

gdzie b_1 i b_2 są dowolnie danymi operatorami, to wystarczy znaleźć rozwiązanie dwóch prostszych równań

$$a_m x^{(m)} + \ldots + a_0 x = f_1(\lambda),$$
$$a_m x^{(m)} + \ldots + a_0 x = f_2(\lambda).$$

Jeżeli mianowicie $x_1(\lambda)$ jest rozwiązaniem pierwszego z tych równań a $x_2(\lambda)$ rozwiązaniem drugiego, to funkcja

$$x(\lambda)=b_1x_1(\lambda)+b_2x_2(\lambda)$$

jest rozwiązaniem równania (19.1), co daje się od razu sprawdzić przez podstawienie.

Z uwagi tej wygodnie jest korzystać w zastosowaniach. Jeżeli na przykład dane jest równanie

$$a_mx^{(m)}+\ldots+a_0x=b_1e^{\lambda w_1}+b_2e^{\lambda w_2}, \tag{19.2}$$

przy czym w_1 jest pierwiastkiem q_1-krotnym, a w_2 pierwiastkiem q_2-krotnym równania charakterystycznego $P(u)=0$, to funkcja

$$x(\lambda)=\frac{b_1}{P^{(q_1)}(w_1)}\lambda^{q_1}e^{\lambda w_1}+\frac{b_2}{P^{(q_2)}(w_2)}\lambda^{q_2}e^{\lambda w_2}$$

jest rozwiązaniem równania (19.2).

Ćwiczenia. Znaleźć rozwiązania szczególne dla następujących równań:

(α) $x''-sx'+s^2x=s\lambda+e^{\lambda}$;

(β) $x'''+s^3x=e^{-s\lambda}+e^{s\lambda}$;

(γ) $sx''+(1+s^2)x'+sx=s+e^{-\lambda}-\dfrac{e^{2\lambda}}{s}$.

§ 20. Przypadek, gdy prawa strona jest funkcją trygonometryczną

Przypuśćmy, że istnieje funkcja wykładnicza $e^{i\lambda w}$ (λ rzeczywiste). Wtedy istnieje też funkcja wykładnicza $e^{-i\lambda w}$ i możemy przyjąć definicje

$$\sin\lambda w=\frac{e^{i\lambda w}-e^{-i\lambda w}}{2i},\qquad \cos\lambda w=\frac{e^{i\lambda w}+e^{-i\lambda w}}{2}.$$

Mając równanie

$$a_mx^{(m)}+\ldots+a_0x=\cos\lambda w, \tag{20.1}$$

możemy najpierw szukać rozwiązań $x_1(\lambda)$ i $x_2(\lambda)$ dla równań

$$a_mx^{(m)}+\ldots+a_0x=e^{i\lambda w},$$
$$a_mx^{(m)}+\ldots+a_0x=e^{-i\lambda w},$$

i następnie napisać rozwiązanie równania (20.1) w postaci

$$x(\lambda)=\tfrac{1}{2}[x_1(\lambda)+x_2(\lambda)].$$

Podobnie można postąpić, gdy po prawej stronie równania zamiast $\cos\lambda w$ jest funkcja $\sin\lambda w$, lub ogólniej funkcja postaci

$$b_1\lambda^{q_1}e^{\lambda w_1}\cos\lambda w_2+b_2\lambda^{q_2}e^{\lambda w_3}\sin\lambda w_4.$$

W praktyce nieraz jest wygodniej stosować bezpośrednio metodę współczynników nieoznaczonych. Mając na przykład równanie

$$x''+sx'+s^2x=\lambda\cos\lambda s, \tag{20.2}$$

szukamy rozwiązania postaci

$$x_0(\lambda)=(c_1+c_2\lambda)\cos\lambda s+(c_3+c_4\lambda)\sin\lambda s.$$

Podstawiając to wyrażenie do (20.2), mamy po uporządkowaniu

$$(c_2s+c_3s^2+2c_4s+c_4s^2\lambda)\cos\lambda s+$$
$$+(-c_1s^2-2c_2s+c_4s-c_2s^2\lambda)\sin\lambda s=\lambda\cos\lambda s.$$

Przez porównanie odpowiednich współczynników otrzymujemy równania

$$c_2s+c_3s^2+2c_4s=0,$$
$$c_4s^2=1,$$
$$-c_1s^2-2c_2s+c_4s=0,$$
$$-c_2s^2=0,$$

z których mamy

$$c_1=\frac{1}{s^3},\qquad c_2=0,\qquad c_3=-\frac{2}{s^3},\qquad c_4=\frac{1}{s^2},$$

i ostatecznie

$$x_0(\lambda)=l^3\cos\lambda s+(l^2\lambda-2l^3)\sin\lambda s.$$

Ćwiczenia. Znaleźć rozwiązania szczególne dla następujących równań:

(α) $x''+s^2x=\lambda^2\sin\lambda s$;

(β) $x''+sx=\lambda\cos\lambda s+e^{\lambda}\sin\lambda s$;

(γ) $x^{(4)}-s^2x=1+2\cos\lambda\sqrt{s}$.

§ 21. Dostosowanie rozwiązania do warunków dodatkowych

Znając jedno rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego, możemy znaleźć rozwiązanie ogólne sposobem podanym w paragrafie 15. Z kolei możemy dostosować stałe w rozwiązaniu ogólnym do dodatkowych warunków (początkowych, brzegowych lub innych).

Metoda jest taka sama, jak w przypadku równań jednorodnych, dlatego ograniczymy się tu do podania tylko jednego przykładu.

Znajdźmy rozwiązanie równania

$$x''' + sx'' - s^2 x' - s^3 x = \lambda e^{\lambda s} \tag{21.1}$$

spełniające warunki

$$x(0) = \frac{1}{2s^3}, \qquad x'(0) = \frac{1}{2s^2}, \qquad x(2) = \frac{1}{2s^2} e^{2s} + \frac{1}{2s^3} e^{-2s}. \tag{21.2}$$

W paragrafie 18 znaleźliśmy następujące rozwiązanie szczególne równania (21.1)

$$x_0(\lambda) = \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda^2}{s^2} - \frac{2\lambda}{s^3}\right) e^{\lambda s}.$$

Ponieważ rozwiązanie ogólne odpowiedniego równania jednorodnego ma postać (zob. § 6)

$$c_1 e^{s\lambda} + c_2 e^{-s\lambda} + c_3 \lambda e^{-s\lambda},$$

więc możemy od razu napisać rozwiązanie ogólne równania (21.1)

$$x(\lambda) = c_1 e^{s\lambda} + c_2 e^{-s\lambda} + c_3 \lambda e^{-s\lambda} + \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda^2}{s^2} - \frac{2\lambda}{s^3}\right) e^{\lambda s}.$$

Z warunków (21.2) dostajemy związki

$$c_1 + c_2 = \frac{1}{2s^3},$$

$$c_1 s - c_2 s + c_3 - \frac{1}{4s^3} = \frac{1}{2s^2},$$

$$c_1 e^{2s} + c_2 e^{-2s} + 2c_3 e^{-2s} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3}\right) e^{2s} = \frac{1}{2s^2} e^{2s} + \frac{1}{2s^3} e^{-2s}.$$

a stąd

$$c_1 = \frac{1}{2s^3}, \qquad c_2 = 0, \qquad c_3 = \frac{1}{4s^3}.$$

Szukane rozwiązanie ma więc postać

$$x(\lambda) = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{s^3} - \frac{2\lambda}{s^3} + \frac{\lambda^2}{s^2}\right) e^{\lambda s} + \frac{1}{4s^3} \lambda e^{-\lambda s}.$$

Jest to jedyne rozwiązanie równania (21.1), czyniące zadość warunkom (21.2).

Ćwiczenia. Znaleźć funkcje operatorowe, spełniające poniższe równania z podanymi warunkami:

(α) $x'' + 5sx' + 6s^2 x = \frac{6}{s}$, $\quad x(0) = \frac{2}{s^3}$, $\quad x'(0) = \frac{3}{s^2}$;

(β) $x'' + 5sx' + 6s^2 x = [1 + 5\lambda s + (2 - 5s + 3s^2)\lambda^2] e^{-2\lambda s}$, $\quad x(0) = -\frac{1}{2}$, $\quad x(1) = 0$;

(γ) $sx''' - x'' - 2s^2 x' + 2sx = 3s \sin \lambda\sqrt{s} - 3s^{5/2} \cos \lambda\sqrt{s}$,
$x(-1) = e^{-1/s} - \sin\sqrt{s}$, $\quad x(0) = 1$, $\quad x(1) = e^{1/s} + \sin\sqrt{s}$;

(δ) $x^{(4)} + 2(1 + s^2)x'' + 4s^2 x = \sin \lambda\sqrt{2}$, $\quad x(0) = x(2) = \frac{1}{s}$;

(ε) $x^{(4)} - 2(1 + s^2)x'' + 4s^2 x = \sin \lambda\sqrt{2}$,
$x(0) = 1$, $\quad x\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = e^{\pi}$, $\quad x\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\pi}$, $\quad x(\pi\sqrt{2}) = e^{2\pi}$.

Czy znalezione rozwiązania są jedyne?

ROZDZIAŁ III

Zastosowania do równań różniczkowych cząstkowych

§ 22. Sprowadzanie równań różniczkowych cząstkowych do równań operatorowych

W części drugiej sprowadzaliśmy pewne specjalne równania cząstkowe (równanie struny drgającej, równanie ciepła, równanie telegrafistów) do równań operatorowych. Obecnie przedyskutujemy tę kwestię ogólniej. Ograniczymy się w dalszym ciągu do równań cząstkowych o współczynnikach stałych, ponieważ do nich najlepiej daje się stosować rachunek operatorów. Każde takie równanie możemy zapisać w postaci

$$\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} x_{\lambda^\mu t^\nu}(\lambda,t)=\varphi(\lambda,t). \tag{22.1}$$

Stosując ogólny wzór

$$\{x^{(\nu)}(t)\}=s^\nu\{x(t)\}-s^{\nu-1}x(0)-\ldots-x^{(\nu-2)}(0)$$

mamy

$$\{x_{\lambda^\mu t^\nu}(\lambda,t)\}=s^\nu\{x_{\lambda^\mu}(\lambda,t)\}-\sum_{\varkappa=0}^{\nu-1}s^{\nu-\varkappa-1}x_{\lambda^\mu t^\nu}(\lambda,0) \qquad (\nu\geqslant 1) \tag{22.2}$$

i równanie (22.1) możemy napisać w następującej postaci operatorowej

$$a_m x^{(m)}+\ldots+a_0 x=f(\lambda), \tag{22.3}$$

gdzie

$$a_\mu=\alpha_{\mu n}s^n+\ldots+\alpha_{\mu 0} \qquad (\mu=0,\ldots,m),$$

$$f(\lambda)=\{\varphi(\lambda,t)\}+\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\varkappa=0}^{\nu-1}\alpha_{\mu\nu}s^{\nu-\varkappa-1}x_{\lambda^\mu t^\varkappa}(\lambda,0) \tag{22.4}$$

oraz

$$x=x(\lambda)=\{x(\lambda,t)\}.$$

Porządkując wyrażenie (22.4) według potęg s możemy napisać

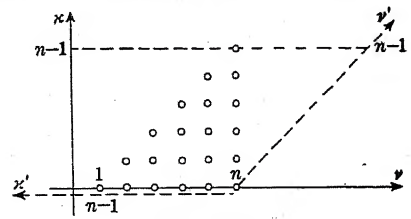
$$f(\lambda)=\{\varphi(\lambda,t)\}+\sum_{\varkappa=0}^{n-1}s^{n-\varkappa-1}\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{\varkappa}\alpha_{\mu,n-\varkappa+\nu}x_{\lambda^\mu t^\nu}(\lambda,0). \tag{22.5}$$

Do równości tej można dojść w następujący sposób. Symbol

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} \tag{22.6}$$

oznacza sumowanie po wszystkich parach wskaźników μ, ν, którym odpowiadają punkty, oznaczone kółeczkami na rysunku 131. Wprowadzając nowe wskaźniki $\varkappa'$, ν', takie że $\varkappa=\nu'$, $\nu=n-\varkappa'+\nu'$, zmieniamy numerację tych punktów i, jak widać z rysunku, symbol (22.6) musimy zastąpić przez

$$\sum_{\varkappa'=0}^{n-1}\sum_{\nu'=0}^{\varkappa'-1}.$$



Rys. 131.

Wobec tego sumę potrójną we wzorze (22.4) można napisać w postaci

$$\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\varkappa'=0}^{n-1}\sum_{\nu'=0}^{\varkappa'-1}\alpha_{\mu,n-\varkappa'+\nu'}s^{n-\varkappa'-1}x_{\lambda^\mu t^{\nu'}}(\lambda,0),$$

skąd już od razu wynika wzór (22.5).

Przykłady. 1. Znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego

$$x_{\lambda\lambda}+x_{tt}=0, \tag{22.7}$$

spełniające warunki

$$x(\lambda,0)=e^\lambda, \qquad x_t(\lambda,0)=e^{2\lambda}. \tag{22.8}$$

Równanie operatorowe ma w tym przypadku postać

$$x''+s^2x=sx(\lambda,0)+x_t(\lambda,0),$$

czyli po uwzględnieniu warunków (22.8)

$$x''+s^2x=se^\lambda+e^{2\lambda}. \tag{22.9}$$

Dla uproszczenia najlepiej rozłożyć to równanie na dwa następujące

$$x_1'' + s^2 x_1 = e^{\lambda} \qquad \text{i} \qquad x_2'' + s^2 x_2 = e^{2\lambda}$$

na podstawie paragrafu 17 rozwiązania tych równań mają postać

$$x_1(\lambda) = \frac{e^{\lambda}}{1+s^2} \qquad \text{i} \qquad x_2(\lambda) = \frac{e^{2\lambda}}{4+s^2}.$$

Stąd mamy rozwiązanie równania (22.9)

$$x(\lambda) = s x_1(\lambda) + x_2(\lambda) = \frac{s}{1+s^2} e^{\lambda} + \frac{1}{4+s^2} e^{2\lambda}. \tag{22.10}$$

Dla znalezienia rozwiązania ogólnego musimy rozwiązać równanie charakterystyczne

$$u^2 + s^2 = 0;$$

pierwiastkami tego równania są operatory $-is$ i $+is$. Ale wiemy, że funkcje wykładnicze $e^{-i\lambda s}$ i $e^{i\lambda s}$ nie istnieją. Wobec tego rozwiązanie ogólne redukuje się do funkcji (22.10), która jest jedynym rozwiązaniem równania (22.9).

W zwykłej, nie operatorowej postaci funkcja ta wyraża się wzorem

$$x(\lambda, t) = e^{\lambda}\cos t + \tfrac{1}{2} e^{2\lambda} \sin 2t.$$

Jest to jedyne rozwiązanie równania (22.7), spełniające warunki (22.8).

Równanie (22.7) nazywa się *równaniem harmonicznym*.

2. *Biharmonicznym* nazywamy równanie

$$x_{\lambda^4} + 2x_{\lambda^2 t^2} + x_{t^4} = 0. \tag{22.11}$$

Rozwiążmy je przy warunkach

$$x(\lambda, 0) = \lambda \sin\lambda, \quad x_t(\lambda,0) = 0, \quad x_{t^2}(\lambda,0) = 0, \quad x_{t^3}(\lambda,0) = 0. \tag{22.12}$$

Zgodnie z (22.2) mamy

$$\{x_{\lambda^2 t^2}(\lambda,t)\} = s^2 x'' - s x_{\lambda^2}(\lambda,0) - x_{\lambda^2 t}(\lambda,0),$$
$$\{x_{t^4}(\lambda,t)\} = s^4 x - s^3 x(\lambda,0) - s^2 x_t(\lambda,0) - s x_{t^2}(\lambda,0) - x_{t^3}(\lambda,0).$$

Wobec tego operatorowa postać równania (22.11) jest następująca:

$$x^{(4)} + 2s^2 x'' + s^4 x = s^3 x(\lambda,0) + s^2 x_t(\lambda,0) + s[2x_{\lambda^2}(\lambda,0) + x_{t^2}(\lambda,0)] + [2x_{\lambda^2 t}(\lambda,0) + x_{t^3}(\lambda,0)].$$

Uwzględniając warunki (22.12) i wynikające z nich równości

$$x_{\lambda^2}(\lambda,0) = 2\cos\lambda - \lambda\sin\lambda, \qquad x_{\lambda^2 t}(\lambda,0) = 0,$$

mamy

$$x^{(4)} + 2s^2 x'' + s^4 x = s^3 \lambda \sin\lambda + 2s(2\cos\lambda - \lambda\sin\lambda). \tag{22.13}$$

Szukamy rozwiązania postaci

$$x(\lambda) = (c_1 + c_2\lambda)\sin\lambda + (c_3 + c_4\lambda)\cos\lambda;$$

po podstawieniu tego wyrażenia do (22.13) i uporządkowaniu mamy

$$(s^2-1)[(s^2-1)(c_1+c_2\lambda) - 4c_4]\sin\lambda + (s^2-1)[(s^2-1)(c_3+c_4\lambda) + 4c_2]\cos\lambda = \\ = (s^3-2s)\lambda\sin\lambda + 4s\cos\lambda,$$

a przez porównanie współczynników

$$(s^2-1)^2 c_2 = s^3 - 2s,$$
$$(s^2-1)^2 c_4 = 0,$$
$$(s^2-1)[(s^2-1)c_1 - 4c_4] = 0,$$
$$(s^2-1)[(s^2-1)c_3 + 4c_2] = 4s.$$

Stąd

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = \frac{s(s^2-2)}{(s^2-1)^2}, \qquad c_3 = \frac{4s}{(s^2-1)^3}, \qquad c_4 = 0.$$

Wobec tego szukane rozwiązanie ma postać

$$x(\lambda) = \frac{s(s^2-2)}{(s^2-1)^2}\lambda\sin\lambda + \frac{4s}{(s^2-1)^3}\cos\lambda.$$

Ponieważ równanie charakterystyczne

$$u^2 + 2s^2u^2 + s^4 = 0$$

ma pierwiastki $-is$, $+is$ (podwójne), a funkcje wykładnicze $e^{-i\lambda s}$, $e^{i\lambda s}$ nie istnieją, więc znalezione rozwiązanie jest jedyne.

Wobec równości

$$\frac{s(s^2-2)}{(s^2-1)^2} = \frac{s}{s^2-1} - \frac{1}{4(s-1)^2} + \frac{1}{4(s+1)^2} = \left\{\operatorname{ch} t - \frac{1}{4}te^t + \frac{1}{4}te^{-t}\right\} = \\ = \left\{\operatorname{ch} t - \frac{t}{2}\operatorname{sh} t\right\},$$

$$\frac{4s}{(s^2-1)^3} = \frac{1}{4(s+1)^2} - \frac{1}{4(s-1)^2} + \frac{1}{2(s+1)^3} + \frac{1}{2(s-1)^3} = \\ = \left\{\frac{t}{4}e^{-t} - \frac{t}{4}e^t + \frac{t^2}{4}e^{-t} + \frac{t^2}{4}e^t\right\} = \left\{\frac{t^2}{2}\operatorname{ch} t - \frac{t}{2}\operatorname{sh} t\right\}$$

można napisać

$$x(\lambda,t)=\lambda\sin\lambda\left(\operatorname{ch}t-\frac{t}{2}\operatorname{sh}t\right)+\frac{1}{2}\cos\lambda(t^2\operatorname{ch}t-t\operatorname{sh}t).$$

Jest to jedyne rozwiązanie równania (22.11), spełniające warunki (22.12).

3. Znaleźć rozwiązanie równania

$$x_{\lambda^2}-x_{\lambda t}+x_{t^2}=e^{\lambda-t}, \tag{22.14}$$

spełniające warunki

$$x(\lambda,0)=0 \quad \text{i} \quad x_t(\lambda,0)=0. \tag{22.15}$$

Ponieważ $\{e^{\lambda-t}\}=\dfrac{e^\lambda}{s+1}$, równanie operatorowe ma postać

$$x''-sx'+s^2x=sx(\lambda,0)+x_t(\lambda,0)-x_\lambda(\lambda,0)+\frac{e^\lambda}{s+1},$$

a wobec warunków (22.15) i wynikającej z nich równości

$$x_\lambda(\lambda,0)=0 \tag{22.16}$$

jest

$$x''-sx'+s^2x=\frac{e^\lambda}{s+1}.$$

Ponieważ $1-s+s^2\neq 0$, funkcja

$$x(\lambda)=\frac{e^\lambda}{(1+s)(1-s+s^2)}=\frac{e^\lambda}{s^3+1}$$

spełnia równanie (22.16).

Wobec równości

$$\frac{1}{s^3+1}=\frac{1}{3}\,\frac{1}{s+1}-\frac{1}{3}\,\frac{s-\frac{1}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\left\{\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}\,t}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right\}$$

możemy napisać

$$x(\lambda,t)=\frac{1}{3}e^\lambda\left(e^{-t}-e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}\,t}{2}+\sqrt{3}\,e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right).$$

Dla udowodnienia, że jest to jedyne rozwiązanie równania (22.14), spełniające warunki (22.15), wystarczy zauważyć, że pierwiastki równania charakterystycznego

$$u^2-su+s^2=0$$

nie są logarytmami; istotnie, pierwiastki te mają postać

$$\frac{s}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}is,\qquad \frac{s}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}is.$$

4. Znaleźć funkcję spełniającą równanie

$$x_{\lambda^3}+3x_{\lambda^2t}+3x_{\lambda t^2}+x_{t^3}=0 \tag{22.17}$$

i warunki

$$x(\lambda,0)=\lambda^3,\qquad x_t(\lambda,0)=\lambda^2,\qquad x_{t^2}(\lambda,0)=\lambda. \tag{22.18}$$

Ponieważ

$$\{x_{\lambda^3}\}=x''',$$
$$\{x_{\lambda^2t}\}=sx''-x_{\lambda^2}(\lambda,0),$$
$$\{x_{\lambda t^2}\}=s^2x'-sx_\lambda(\lambda,0)-x_{\lambda t}(\lambda,0),$$
$$\{x_{t^3}\}=s^3x-s^2x(\lambda,0)-sx_t(\lambda,0)-x_{t^2}(\lambda,0),$$

więc równanie operatorowe ma postać

$$x'''+3sx'''+3s^2x'+s^3x=s^2x(\lambda,0)+s[3x_\lambda(\lambda,0)+x_t(\lambda,0)]+$$
$$+[3x_{\lambda^2}(\lambda,0)+3x_{\lambda t}(\lambda,0)+x_{t^2}(\lambda,0)],$$

a po uwzględnieniu warunków (22.18)

$$x'''+3sx''+3s^2x'+s^3x=s^2\lambda^3+10s\lambda^2+25\lambda. \tag{22.19}$$

Metodą współczynników nieoznaczonych łatwo jest znaleźć dla równania (22.19) rozwiązanie wielomienne

$$x_0(\lambda)=l\lambda^3+l^2\lambda^2+l^3\lambda-15l^4.$$

Nie jest to jednak jedyne rozwiązanie tego równania, gdyż równanie charakterystyczne

$$u^3+3su^2+3s^2u+s^3=0$$

ma potrójny pierwiastek $-s$, który jest logarytmem. Wobec tego ogólne rozwiązanie równania (22.19) ma postać

$$x(\lambda)=(c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2)\,e^{-\lambda s}+x_0(\lambda),$$

gdzie c_1, c_2 i c są dowolnymi operatorami.

Stąd wynika, że również rozwiązanie równania cząstkowego (22.17) nie jest jednoznacznie określone przez warunki (22.18). Dla uzyskania jednoznaczności rozwiązania, konieczne jest wprowadzenie dalszych warunków, na przykład

$$x(0,t)=t^3, \qquad x_\lambda(0,t)=t^2, \qquad x_{\lambda\lambda}(0,t)=t. \tag{22.20}$$

Warunkom tym odpowiadają warunki operatorowe

$$x(0)=6l^4, \qquad x'(0)=2l^3, \qquad x''(0)=l^2;$$

prowadzą one do równości

$$x(0)=c_0-15l^4=6l^4,$$
$$x'(0)=c_1-sc_0+l^3=2l^3,$$
$$x''(0)=2c_2-2sc_1+s^2c_0+2l^2=l^2,$$

z których wyliczamy

$$c_0=21l^4, \qquad c_1=22l^3, \qquad c_2=11l^2.$$

Szukanym rozwiązaniem jest więc funkcja

$$x(\lambda)=(21l^4+22l^3\lambda+11l^2\lambda^2)\,e^{-\lambda s}+l\lambda^3+l^2\lambda^2+l^3\lambda-15l^4.$$

Uwzględniając znaczenie operatora przesunięcia $e^{-\lambda s}$, dochodzimy do wzorów

$$x(\lambda,t)=\begin{cases} \lambda^3+t\lambda^2+\frac{1}{2}t^2\lambda-\frac{5}{2}t^3 & \text{dla } 0\leqslant t<\lambda, \\ -\frac{5}{2}\lambda^2+\frac{1}{2}t\lambda^2+t^2\lambda+t^3 & \text{dla } 0\leqslant \lambda<t. \end{cases}$$

Jest to jedyne rozwiązanie równania (22.17), czyniące zadość warunkom (22.18) i (22.20).

§ 23. Uwagi o warunkach dodatkowych

Ostatni z podanych przykładów różni się tym od poprzednich, że oprócz warunków (22.18), określających zachowanie się rozwiązania na osi t, potrzebne jeszcze były trzy dodatkowe warunki dla jednoznacznego ustalenia rozwiązania. Pochodzi to stąd, że rozwiązanie ogólne równania operatorowego (22.19) zawiera trzy stałe dowolne. Liczba uzupełniających warunków będzie zawsze równa liczbie stałych dowolnych, występujących w rozwiązaniu ogólnym. Warunki te mogą być zadane na jednej lub więcej prostych równoległych do osi t. Na przykład w zagadnieniu struny

drgającej i przewodnictwa ciepła rozwiązywaliśmy przypadki, gdy warunki uzupełniające były zadane na dwóch prostych (liczba tych prostych nie może oczywiście przekraczać liczby stałych dowolnych w rozwiązaniu ogólnym).

Ćwiczenie. Rozwiązać następujące równania różniczkowe przy podanych warunkach:

(α) $x_{\lambda\lambda}+x_{tt}=0$, $x(\lambda,0)=\lambda$, $x_t(\lambda,0)=\sin\lambda$;

(β) $x_{\lambda\lambda}+x_{tt}=1$, $x(\lambda,0)=0$, $x_t(\lambda,0)=\lambda^2e^{-\lambda}$;

(γ) $x_{\lambda^4}-x_{t^4}=3\lambda t^2$, $x(\lambda,0)=\lambda^3$, $x_t(\lambda,0)=x_{t^2}(\lambda,0)=x_{t^3}(\lambda,0)=0$, $x(0,t)=t^4$, $x(1,t)=1$ $(0\leqslant\lambda\leqslant 1,\ 0\leqslant t<\infty)$,

(δ) $x_{\lambda^3}+x_{\lambda^2t}+3x_{\lambda t^2}+3x_{t^3}=t^2e^{\lambda}$, $x(\lambda,0)=x_t(\lambda,0)=x_{t^2}(\lambda,0)=0$, $x(0,t)=0$ $(0\leqslant\lambda<\infty,\ 0\leqslant t<\infty)$.

§ 24. Błędne rozwiązanie

Rozwiążmy równanie

$$x_{\lambda^3t}+x_{\lambda^2t}+x_{\lambda^2}-x_{\lambda t^2}-x_{t^2}-x_t+1=0 \tag{24.1}$$

z warunkami

$$x(\lambda,0)=0, \qquad x_t(\lambda,0)=1-e^{-\lambda} \qquad (0<\lambda<\infty), \tag{24.2}$$

$$x(0,t)=0, \qquad x_\lambda(0,t)=2\sqrt{t/\pi}, \qquad x_{\lambda^2}(0,t)=-1 \quad (0<t<\infty). \tag{24.3}$$

Odpowiednie równanie operatorowe ma postać

$$sx'''+(s+1)\,x''-s^2x'-(s^2+s)\,x=-s[x_\lambda(\lambda,0)+x(\lambda,0)]+$$
$$+[x_{\lambda^3}(\lambda,0)+x_{\lambda^2}(\lambda,0)-x_{\lambda t}(\lambda,0)-x_t(\lambda,0)-x(\lambda,0)]-\frac{1}{s}.$$

Z (24.2) wyliczamy łatwo

$$x_\lambda(\lambda,0)=x_{\lambda^2}(\lambda,0)=x_{\lambda^3}(\lambda,0)=0, \qquad x_{\lambda t}(\lambda,0)=e^{-\lambda};$$

wobec tego mamy

$$\begin{aligned} &x_\lambda(\lambda,0)+x(\lambda,0)=0, \\ &x_{\lambda^3}(\lambda,0)+x_{\lambda^2}(\lambda,0)-x_{\lambda t}(\lambda,0)-x_t(\lambda,0)-x(\lambda,0)=-1 \end{aligned} \tag{24.4}$$

i

$$sx'''+(s+1)x''-s^2x'-(s^2+s)\,x=-1-\frac{1}{s}. \tag{24.5}$$

Łatwo znaleźć rozwiązanie wielomienne równania (24.5); redukuje się ono do stałej

$$x_0(\lambda)=\frac{1}{s^2}.$$

Równanie charakterystyczne ma postać

$$su^3+(s+1)u^2-s^2u-(s^2+s)=0,$$

a jego pierwiastkami są operatory

$$\sqrt{s}, \qquad -\sqrt{s} \qquad \text{i} \qquad -\frac{1}{s}-1.$$

Wobec tego ogólnym rozwiązaniem równania (24.5) jest wyrażenie

$$x(\lambda)=c_1e^{\lambda\sqrt{s}}+c_2e^{-\lambda\sqrt{s}}+c_3e^{-\lambda\left(\frac{1}{s}+1\right)}+\frac{1}{s^2}.$$

Warunkom (24.3) odpowiadają warunki operatorowe

$$x(0)=0, \qquad x'(0)=s^{-3/2}, \qquad x''(0)=-s^{-1};$$

uwzględniając je dla wyznaczenia stałych c_1, c_2 i c_3, otrzymujemy równości

$$\begin{aligned} x(0)&=c_1+c_2+c_3+s^{-2}=0,\\ x'(0)&=\sqrt{s}\,c_1-\sqrt{s}\,c_2-(s^{-1}+1)\,c_3=s^{-3/2},\\ x''(0)&=sc_1+sc_2+(s^{-1}+1)^2c_3=-s^{-1};\end{aligned}$$

stąd

$$c_1=0, \qquad c_2=-s^{-2}, \qquad c_3=0$$

i

$$x(\lambda)=\frac{1}{s^2}\left(1-e^{-\lambda\sqrt{s}}\right).$$

Równość tę możemy napisać jeszcze w postaci

$$x(\lambda)=\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-\lambda\sqrt{s}}\right)=\frac{1}{s}\left\{1-\operatorname{cerf}\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\right\}=\frac{1}{s}\left\{\operatorname{erf}\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\right\}.$$

Stąd mamy następujące „rozwiązanie” podanego na początku tego paragrafu zagadnienia

(24.6) $$x(\lambda,t)=\int_0^t \operatorname{erf}\frac{\lambda}{2\sqrt{\tau}}\,d\tau.$$

Wyraz „rozwiązanie” został ujęty w cudzysłów, dlatego że faktycznie nie mamy tu wcale do czynienia z rozwiązaniem, gdyż

znaleziona funkcja $x(\lambda,t)$ nie spełnia żądanych warunków. Istotnie, jest $x_t(\lambda,t)=\operatorname{erf}\dfrac{\lambda}{2\sqrt{t}}$ i w granicy, gdy $t\to 0$, mamy $x_t(\lambda,0)=1$ wbrew drugiemu z warunków (24.2).

Gdzie tkwi błąd? — Odpowiedź damy w następnym paragrafie.

§ 25. Wyjaśnienie pozornej sprzeczności

Zauważmy najpierw, że znaleziona funkcja operatorowa $x(\lambda)=\{x(\lambda,t)\}$ spełnia równanie operatorowe (24.5). Równanie to zostało wyprowadzone z równania (24.1) przy uwzględnieniu warunków (24.2). Ale warunki te nie zostały w pełni wykorzystane, gdyż przy przejściu do postaci operatorowej jedynie równości (24.4) grały rolę.

Funkcja $x(\lambda,t)$ spełnia, jak można sprawdzić, warunki (24.4), a nie spełnia warunków (24.2). Przeprowadzony rachunek wykazuje, że funkcja ta jest jedynym rozwiązaniem równania (24.1) spełniającym warunki (24.3) i (24.4).

Można zresztą sprawdzić bezpośrednio, że funkcja $x(\lambda,t)$ spełnia równanie (24.1) oraz warunki (24.3) i (24.4).

Istotnie, wobec

(25.1) $$x(\lambda,t)=\int_0^t \operatorname{erf}\frac{\lambda}{2\sqrt{\tau}}\,d\tau=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau\int_0^{\frac{\lambda}{2\sqrt{\tau}}} e^{-\sigma^2}\,d\sigma$$

znajdujemy kolejno pochodne względem λ:

$$x_\lambda(\lambda,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\tau}}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4\tau}\right)d\tau,$$

(25.2) $$x_{\lambda^2}(\lambda,t)=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\lambda}{\sqrt{\tau^3}}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4\tau}\right)d\tau=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-\sigma^2}\,d\sigma=-\operatorname{cerf}\frac{\lambda}{2\sqrt{t}},$$

$$x_{\lambda^3}(\lambda,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right).$$

Podobnie z (25.1) znajdujemy pochodne względem t:

(25.3) $$\begin{aligned} x_t(\lambda,t)&=\operatorname{erf}\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}}e^{-\sigma^2}\,d\sigma,\\ x_{t^2}(\lambda,t)&=-\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right).\end{aligned}$$

Z kolei znajdujemy pochodne mieszane:

$$
\begin{aligned}
x_{\lambda t}(\lambda,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right),\\
x_{\lambda t^2}(\lambda,t) &= -\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}+\frac{\lambda^2}{4\sqrt{\pi t^5}}\right)\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right),\\
x_{\lambda^2 t}(\lambda,t) &= -\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right),\\
x_{\lambda^3 t}(\lambda,t) &= -\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}+\frac{\lambda^2}{4\sqrt{\pi t^5}}\right)\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right).
\end{aligned}
\tag{25.4}
$$

Po podstawieniu odpowiednich wartości do równania (24.1) i skreśleniu jednakowych wyrazów różniących się znakiem, otrzymamy po lewej stronie

$$-\operatorname{cerf}\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}-\operatorname{erf}\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}+1;$$

wobec własności funkcyj cerf i erf wyrażenie to jest równe zeru. Zatem równanie (24.1) jest spełnione.

Podstawiając teraz $\lambda=0$, znajdujemy z wzorów (25.1) i (25.2)

$$x(0,t)=0,\qquad x_\lambda(0,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}=2\sqrt{\frac{t}{\pi}},\qquad x_{\lambda^2}(0,t)=-1,$$

gdyż $\operatorname{cerf}0=1$. Widać więc, że warunki (24.3) są spełnione.

Podobnie, podstawiając we wzorze (25.1) $t=0$, mamy

$$x(\lambda,0)=0, \tag{25.5}$$

a stąd

$$x_\lambda(\lambda,0)=x_{\lambda^2}(\lambda,0)=x_{\lambda^3}(\lambda,0)=0 \tag{25.6}$$

(te trzy ostatnie równości można też otrzymać wprost z (25.2) przy $t\to 0$). Pierwszy z wzorów (25.3) daje przy $t\to 0$

$$x_t(\lambda,0)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\sigma^2}d\sigma=1, \tag{25.7}$$

skąd

$$x_{\lambda t}(\lambda,0)=0 \tag{25.8}$$

(tę ostatnią równość można też otrzymać wprost z pierwszego z wzorów (25.4) przy $t\to 0$). Podstawiając wartości (25.5)-(25.8) do równości (24.4), sprawdzamy łatwo, że równości te są spełnione.

Jeżeli jakaś funkcja spełnia warunki (24.2), to musi też spełniać warunki (24.4). Stąd wynika, że rozwiązanie równania (24.1), spełniające warunki (24.2) i (24.3) w ogóle nie istnieje.

Zagadnienie było więc w poprzednim paragrafie postawione błędnie: układ warunków (24.2) i (24.3) jest dla danego równania sprzeczny.

Sprzeczność ta znika, o ile warunki na osi λ podamy od razu w postaci (24.4). Przy tych warunkach oraz przy warunkach (24.3) dochodzimy w sposób jednoznaczny do funkcji (24.6), która przy takich warunkach jest już faktycznym, a nie błędnym rozwiązaniem zagadnienia.

Warunki (24.2) i (24.4) nie są równoważne. Z (24.2) wynikają (24.4), ale nie na odwrót.

We wszystkich wcześniejszych przykładach warunki analogiczne do (24.2) i (24.4) były zawsze równoważne i dlatego znalezione rozwiązania były poprawne.

§ 26. Warunki Cauchy'ego i kwestia ich równoważności z warunkami ogólnymi

Przy przejściu od ogólnego równania (22.1)

$$\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_{\mu\nu}x_{\lambda^\mu t^\nu}(\lambda,t)=\varphi(\lambda,t)$$

do równania operatorowego (22.3)

$$a_m x^{(m)}+\dots+a_0x=f(\lambda)$$

wystarczy dla wyznaczenia funkcji $f(\lambda)$ znać w rozważanym przedziale $\alpha<\lambda<\beta$ kształt następujących funkcyj:

$$\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{\varkappa}\alpha_{\mu n-\varkappa+\nu}x_{\lambda^\mu t^\nu}(\lambda,0)=g_\varkappa(\lambda)\qquad(\varkappa=0,\dots,n-1), \tag{26.1}$$

które określają zachowanie się rozwiązania $x(\lambda,t)$ na osi λ.

W pewnych przypadkach, jak w przykładach z paragrafu 22, można warunki (26.1) zastąpić przez warunki prostsze

$$x_{t^\varkappa}(\lambda,0)=h_\varkappa(\lambda)\qquad(\varkappa=0,\dots,n-1); \tag{26.2}$$

warunki typu (26.2) nazywamy *warunkami Cauchy'ego*.

Ale, jak widzieliśmy w paragrafach 24 i 25, warunki Cauchy'ego (26.2) można wprowadzić zamiast warunków ogólnych (26.1) tylko wtedy, gdy są z nimi równoważne.

Jeżeli dla pewnego równania cząstkowego warunki (26.1) i (26.2) nie są równoważne, to będziemy mówili, że dane równanie

jest *restryktywne*. W tym przypadku warunki na osi λ powinny być podane w postaci (26.1). Gdy równanie nie jest restryktywne, to warunki na osi λ mogą być podane w postaci (26.1) lub też w postaci Cauchy'ego (26.2).

Zawsze możemy założyć, że co najmniej jeden ze współczynników $a_{0n},\dots,a_{mn}$ jest różny od zera. Wówczas mamy następujące kryterium:

Równanie (22.1) *nie jest restryktywne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$a_{1n}=\dots=a_{mn}=0, \tag{26.3}$$

lub, co na jedno wychodzi, gdy żadna pochodna cząstkowa, której rząd względem t jest w danym równaniu najwyższy, nie jest pochodną mieszaną.

Dowód. Jeżeli warunek (26.3) jest spełniony, to $a_{0n}\neq 0$ i równości (26.1) można napisać w postaci

$$a_{0n}x(\lambda,0)=g_0(\lambda), \tag{26.4}$$

$$a_{0n}x_{t^{\varkappa}}(\lambda,0)+\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{\varkappa-1}a_{\mu n-\varkappa+\nu}x_{\lambda^{\mu}t^{\nu}}(\lambda,0)=g_{\varkappa}(\lambda) \qquad (\varkappa=1,\dots,n-1). \tag{26.5}$$

Funkcja $x(\lambda,0)$ jest określona jednoznacznie przez równość (26.4). Przyjmując w (26.5) $\varkappa=1$, wyliczymy w sposób jednoznaczny $x_t(\lambda,0)$, gdyż pod znakiem podwójnej sumy stoją wówczas wyłącznie funkcje $x_{\lambda^{\mu}}(\lambda,0)$, które już są znane, skoro tylko jest znana funkcja $x(\lambda,0)$. Przyjmując z kolei $\varkappa=2$, możemy z (26.5) wyliczyć jednoznacznie $x_{t^2}(\lambda,0)$, gdyż pod znakiem sumy będą występowały tylko funkcje $x(\lambda,0)$, $x_t(\lambda,0)$ i ich pochodne (względem λ). W ten sposób wyliczymy jednoznacznie wszystkie funkcje $x(\lambda,0)$, $x_t(\lambda,0),\dots,x_{t^{n-1}}(\lambda,0)$.

Stąd wynika, że jeżeli są określone wszystkie funkcje $g_{\varkappa}(\lambda)$, to jednocześnie są określone wszystkie funkcje $h_{\varkappa}(\lambda)$. Z drugiej strony widoczne jest z postaci równości (26.1) i (26.2), że jeżeli są określone wszystkie funkcje $h_{\varkappa}(\lambda)$, to tym samym są określone wszystkie funkcje $g_{\varkappa}(\lambda)$. Zatem warunki (26.1) i (26.2) są równoważne.

Gdy warunek (26.3) nie jest spełniony, to co najmniej jeden ze współczynników $a_{1n},\dots,a_{mn}$ jest różny od zera. Wtedy przy $\varkappa=0$ możemy z równości (26.1) wyliczyć $x(\lambda,0)$ przez rozwiązanie równania różniczkowego (zwyczajnego)

$$\sum_{\mu=0}^{n}a_{\mu n}x_{\lambda^{\mu}}(\lambda,0)=g_0(\lambda);$$

rozwiązanie to nie jest jednoznaczne. Ustaliwszy $x(\lambda,0)$, możemy kolejno wyliczyć (nie koniecznie w sposób jednoznaczny) funkcje $x_t(\lambda,0),\dots,x_{t^{n-1}}(\lambda,0)$. W tym więc przypadku warunki (26.1) i (26.2) nie są równoważne.

Kryterium jest więc udowodnione.

Łatwo sprawdzić, że we wszystkich przykładach paragrafu 22 warunek (26.3) był spełniony. Na przykład w równaniu (22.16) ostatni wyraz przedstawia pochodną najwyższego rzędu względem t; pochodna ta nie jest mieszana. Natomiast w równaniu (24.1) wyrazy $x_{\lambda t^2}$ i x_{t^2} są pochodnymi najwyższego (drugiego) rzędu względem t; jednak pierwszy z nich jest pochodną mieszaną, z czego wynika, że równanie jest restryktywne.

§ 27. Rozwiązywanie równań restryktywnych

Metoda operatorów pozwala rozwiązywać zarówno równania restryktywne jak i nierestryktywne. Przykładem równania restryktywnego jest równanie (24.1); znalezione w paragrafie 24 rozwiązanie tego równania jest poprawne przy warunkach (24.3) i (24.4).

Omówimy tu jeszcze jeden przykład równania restryktywnego, a mianowicie

$$x_{\lambda^3 t}+x_{\lambda t^3}+x_{\lambda^2}+x_{t^2}=e^{\lambda+t}. \tag{27.1}$$

Równaniu temu odpowiada równanie operatorowe

$$\begin{gathered} sx'''+x''+s^3x'+s^2x=s^2x_{\lambda}(\lambda,0)+\\ +s[x_{\lambda t}(\lambda,0)+x(\lambda,0)]+[x_{\lambda^3}(\lambda,0)+x_{\lambda t^2}(\lambda,0)+x_t(\lambda,0)]+\frac{e^{\lambda}}{s-1}. \end{gathered} \tag{27.2}$$

Ponieważ w równaniu (27.1) pochodną najwyższego rzędu względem t reprezentuje wyraz $x_{\lambda t^3}$ i jest to pochodna mieszana, więc równanie jest restryktywne. Wobec tego warunki na osi λ zapiszemy w postaci

$$\begin{aligned} x_{\lambda}(\lambda,0)&=g_0(\lambda),\\ x_{\lambda t}(\lambda,0)+x(\lambda,0)&=g_1(\lambda),\\ x_{\lambda^3}(\lambda,0)+x_{\lambda t^2}(\lambda,0)+x_t(\lambda,0)&=g_2(\lambda). \end{aligned} \tag{27.3}$$

Dla zbadania, ile warunków należy jeszcze podać na osi t, szukamy pierwiastków równania charakterystycznego

$$su^3+u^2+s^3u+s^2=0.$$

Są nimi operatory
$$-\frac{1}{s}, \qquad is, \qquad -is.$$
Ponieważ tylko jeden z nich (pierwszy) jest logarytmem, więc na osi t wystarcza jeden warunek

$$x(0,t)=v(t). \tag{27.4}$$

Wobec (27.3) równanie operatorowe (27.2) przyjmuje postać

$$sx'''+x''+s^3x'+s^2x=s^2g_0(\lambda)+sg_1(\lambda)+g_2(\lambda)+\frac{e^\lambda}{s-1}; \tag{27.5}$$

warunek (27.4) można zapisać w postaci operatorowej
$$x(0)=v.$$

Znając $g_0(\lambda)$, $g_1(\lambda)$, $g_2(\lambda)$ i v, można rozwiązać równanie (27.1) tą samą metodą, jaką stosowaliśmy w rozwiązywaniu przykładów z paragrafu 22.

Jeżeli dla przykładu przyjmiemy, że

$$\begin{gathered} x_\lambda(\lambda,0)=\tfrac{1}{4}e^\lambda, \qquad x_{\lambda t}(\lambda,0)+x(\lambda,0)=1+\tfrac{1}{2}e^\lambda, \\ x_{\lambda^3}(\lambda,0)+x_{\lambda t^2}(\lambda,0)+x_t(\lambda,0)=\lambda+\tfrac{3}{4}e^\lambda, \qquad v(t)=\tfrac{1}{4}e^t, \end{gathered} \tag{27.6}$$

to będziemy mieli

$$sx'''+x''+s^3x'+s^2x=\frac{1}{4}\left(s^2+2s+3+\frac{4}{s-1}\right)e^\lambda+s+\lambda. \tag{27.7}$$

Rozwiązanie szczególne tego równania znajdziemy łatwo, rozbijając równanie na dwa następujące:

$$sx_1'''+x_1''+s^3x_1'+s^2x_1=\frac{1}{4}\left(s^2+2s+3+\frac{4}{s-1}\right)e^\lambda,$$
$$sx_2'''+x_2''+s^3x_2'+s^2x_2=s+\lambda.$$

Dla pierwszego z tych równań znajdujemy rozwiązanie szczególne (zob. § 17):

$$x_1(\lambda)=\frac{\frac{1}{4}\left(s^2+2s+3+\frac{4}{s-1}\right)}{s+1+s^3+s^2}e^\lambda=\frac{e^\lambda}{4(s-1)},$$

dla drugiego zaś (zob. § 16)

$$x_2(\lambda)=\frac{\lambda}{s^2}.$$

Wobec tego możemy przyjąć funkcję

$$x_0(\lambda)=x_1(\lambda)+x_2(\lambda)=\frac{e^\lambda}{4(s-1)}+\frac{\lambda}{s^2}$$

za rozwiązanie szczególne równania (27.7).

Ponieważ równanie charakterystyczne ma tylko jeden pierwiastek będący logarytmem, mianowicie $-1/s$, więc rozwiązanie ogólne równania (27.7) ma postać

$$x(\lambda)=ce^{-\lambda/s}+\frac{e^\lambda}{4(s-1)}+\frac{\lambda}{s^2}.$$

Dostosowując je do warunku

$$x(0)=v=\frac{1}{4(s-1)}$$

znajdujemy z łatwością $c=0$ i

$$x(\lambda)=\frac{e^\lambda}{4(s-1)}+\frac{\lambda}{s^2}.$$

Wobec tego szukanym rozwiązaniem równania cząstkowego (27.1) jest funkcja

$$x(\lambda,t)=\tfrac{1}{4}e^{\lambda+t}+\lambda t;$$

jest to jedyne rozwiązanie tego równania, spełniające warunki (27.6).

§ 28. Kwestia równoważności równania cząstkowego i równania operatorowego

Równaniu cząstkowemu (27.1) z warunkami (27.3) odpowiada równanie operatorowe (27.5). Zastanowimy się, czy jest ono całkowicie równoważne.

Każde rozwiązanie równania cząstkowego (27.1), spełniające warunki początkowe (27.3), traktowane jako funkcja parametryczna jest jednocześnie rozwiązaniem równania operatorowego (27.5). Jeżeli do takiego rozwiązania dodamy na przykład funkcję operatorową $se^{-s^{-1}\lambda}$, to suma będzie nadal spełniać równanie operatorowe (27.5), ponieważ funkcja $se^{-s^{-1}\lambda}$ spełnia równanie jednorodne

$$sx'''+x''+s^3x'+s^2x=0.$$

Ale suma ta nie będzie już funkcją parametryczną i dlatego nie może być rozwiązaniem równania cząstkowego.

Klasa rozwiązań równania operatorowego (27.5) jest więc szersza od klasy rozwiązań równania cząstkowego (27.1) z warunkami (27.3).

Jeżeli jednak ograniczymy się do klasy funkcyj parametrycznych $x(\lambda)=x(\lambda,t)$, takich że pochodne cząstkowe

$$x_{\lambda^3 t}(\lambda,t),\qquad x_{\lambda t^3}(\lambda,t),\qquad x_{\lambda^2}(\lambda,t)\qquad \text{i}\qquad x_{t^2}(\lambda,t)$$

są ciągłe, to każde rozwiązanie równania operatorowego (27.5) będzie jednocześnie rozwiązaniem równania cząstkowego (27.1), spełniającym warunki (27.3). W obrębie tej klasy jest więc równanie operatorowe (27.5) równoważne równaniu cząstkowemu (27.1) z warunkami (27.3).

To samo ma miejsce w przypadku ogólnym:

W obrębie klasy funkcyj $x(\lambda,t)$, których wszystkie pochodne cząstkowe $x_{\lambda^\mu t^\nu}(\lambda,t)$ występujące w równaniu (22.1) *są ciągłe w pewnym obszarze*

$$D:\qquad \alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta,\quad 0\leqslant t<\infty,$$

równanie (22.1) *z dołączonymi warunkami początkowymi* (26.1) *jest równoważne równaniu operatorowemu* (22.3), *rozpatrywanemu w przedziale $\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta$.*

G. Doetsch[1]) zwraca uwagę na to, że w wielu zastosowaniach fizyki rozpatrywana wyżej klasa rozwiązań jest za wąska. Dlatego celowe jest rozszerzenie rozważanej klasy na funkcje, których pochodne cząstkowe, figurujące w równaniu, są określone i ciągłe *wewnątrz* obszaru D. Funkcje te mają spełniać równanie wewnątrz obszaru D, ale nie muszą spełniać równania na jego brzegu. Wtenczas warunki na osi λ i na osi t należy rozumieć jako równości, które dostaje się w granicy przy zbliżaniu do tych osi. [Tak też należy rozumieć warunki dla równania ciepła (w rozdziale 6 części II) oraz warunki (24.4) dla równania (24.1)]. Nie będziemy tu ogólnie roztrząsać kwestii równoważności równania operatorowego i równania cząstkowego przy tego rodzaju warunkach granicznych, zauważymy tylko, że dzięki ogólności pojęcia granicy w rachunku operatorów można bardzo szeroko pojmować warunki graniczne w równaniach cząstkowych.

---

[1]) Doetsch [11].

§ 29. Dalsze przykłady rozwiązywania równań cząstkowych

Przykład 1. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$x_{\lambda^3}+x_{t^3}=1+t^2\lambda \qquad (t\geqslant 0,\ \lambda\geqslant 0) \tag{29.1}$$

przy warunkach początkowych

$$x(\lambda,0)=x_t(\lambda,0)=x_{t^2}(\lambda,0)=0, \tag{29.2}$$

$$x(0,t)=0. \tag{29.3}$$

Na osi λ zostały tu podane warunki Cauchy'ego, ponieważ zgodnie z kryterium z paragrafu 26 równanie nie jest restryktywne.

Równanie operatorowe, odpowiadające równaniu (29.1) i warunkom (29.2) ma postać

$$x'''+s^3x=l+2l^3\lambda;$$

metodą współczynników nieoznaczonych znajdujemy jego rozwiązanie wielomienne

$$x_0(\lambda)=l^4+2l^6\lambda.$$

Dla znalezienia rozwiązania ogólnego, szukamy pierwiastków równania charakterystycznego

$$u^3+s^3=0;$$

są nimi operatory

$$-s,\qquad \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}s,\qquad \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}s,$$

z których tylko pierwszy jest logarytmem. Wobec tego rozwiązaniem ogólnym będzie wyrażenie

$$x(\lambda)=ce^{-s\lambda}+l^4+2l^6\lambda.$$

Wobec (29.3) mamy $x(0)=0$, czyli $c+l^4=0$. Stąd $c=-l^4$ i szukane rozwiązanie

$$x(\lambda)=-l^4e^{-s\lambda}+l^4+2l^6\lambda.$$

Uwzględniając znaczenie operatora przesunięcia $e^{-s\lambda}$, możemy napisać

$$x(\lambda,t)=\begin{cases}\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{60}t^5\lambda & \text{dla}\quad 0\leqslant t\leqslant\lambda,\\ \frac{1}{2}t^2\lambda-\frac{1}{2}t\lambda^2+\frac{1}{6}\lambda^3+\frac{1}{60}t^5\lambda & \text{dla}\quad 0\leqslant\lambda\leqslant t.\end{cases}$$

Jest to jedyne rozwiązanie równania (29.1), czyniące zadość warunkom (29.2) i (29.3).

Przykład 2. Rozwiązać równanie

$$x_{\lambda^4 t^2}+4x_{\lambda^2 t^4}-x_{\lambda^2}-4x_{t^2}=0 \qquad (\lambda\geqslant 0,\ t\geqslant 0)$$

z warunkami

$$
\begin{aligned}
&4x_{\lambda^2}(\lambda,0)=0, \qquad 4x_{t\lambda^2}(\lambda,0)=4,\\
&x_{\lambda^4}(\lambda,0)+4x_{\lambda^2 t^2}(\lambda,0)-4x(\lambda,0)=0,\\
&x_{\lambda^4 t}(\lambda,0)+4x_{\lambda^2 t^3}(\lambda,0)-4x_t(\lambda,0)=0,\\
&x(0,t)=0, \qquad x_\lambda(0,t)=0.
\end{aligned}
\tag{29.4}
$$

Zgodnie z kryterium z paragrafu 26 równanie jest tym razem restryktywne; dlatego warunki na osi λ zostały podane w postaci ogólnej.

Łatwo znajdujemy równanie operatorowe

$$s^2x^{(4)}+(4s^4-1)x''-4s^2x=4s^2$$

i jego rozwiązanie szczególne

$$x_0=-1.$$

Równanie charakterystyczne ma postać

$$s^2u^4+4s^4u^2-u^2-4s^2=0;$$

jego pierwiastkami są operatory

$$l, \qquad -l, \qquad 2is, \qquad -2is,$$

z których tylko dwa pierwsze są logarytmami. Wobec tego rozwiązaniem ogólnym będzie wyrażenie

$$x(\lambda)=c_1e^{l\lambda}+c_2e^{-l\lambda}-1.$$

Wobec (29.4) mamy $x(0)=x'(0)=0$, a stąd $c_1=c_2=\frac{1}{2}$. Zatem

$$x(\lambda)=\operatorname{ch} l\lambda-1=\frac{l^2\lambda^2}{2!}+\frac{l^4\lambda^4}{4!}+\dots$$

i

$$x(\lambda,t)=\frac{t\lambda^2}{1!\,2!}+\frac{t^3\lambda^4}{3!\,4!}+\dots$$

Jest to jedyne rozwiązanie, czyniące zadość warunkom zadania.

Przykład 3. Rozwiązać równanie

$$x_{\lambda^2 t^2}-2x_{\lambda^2 t}+x_{\lambda^2}-x+4e^\lambda=0 \qquad (\lambda\geqslant 0,\ t\geqslant 0)$$

z warunkami

$$
\begin{aligned}
&x_{\lambda^2}(\lambda,0)=e^\lambda, \qquad x_{\lambda^2 t}(\lambda,0)-2x_{\lambda^2}(\lambda,0)=\lambda,\\
&x(0,t)=1+2t, \qquad x_\lambda(0,t)=2t.
\end{aligned}
\tag{29.5}
$$

Podobnie jak w przykładzie poprzednim równanie jest restryktywne i warunki na osi λ są podane w postaci ogólnej.

Mamy teraz równanie operatorowe

$$(s-1)^2x''-x=(s-4l)\,e^\lambda+\lambda,$$

i warunki wynikające z (29.5)

$$x(0)=l+2l^2, \qquad x'(0)=2l^2. \tag{29.6}$$

Dla znalezienia rozwiązania szczególnego $x_0(\lambda)$ rozbijmy równanie na dwa następujące

$$(s-1)^2x_1''-x_1=(s-4l)\,e^\lambda, \qquad (s-1)^2x_2''-x^2=\lambda;$$

dla tych równań z łatwością znajdujemy rozwiązanie szczególne

$$x_1(\lambda)=(l+2l^2)\,e^\lambda \qquad \text{i} \qquad x_2(\lambda)=-\lambda.$$

Stąd

$$x_0(\lambda)=x_1(\lambda)+x_2(\lambda)=(l+2l^2)e^\lambda-\lambda.$$

W celu znalezienia rozwiązania ogólnego, rozwiążmy równanie charakterystyczne

$$s^2u^2-2su^2+u^2-1=0;$$

jego pierwiastkami są operatory

$$\frac{1}{s-1} \qquad \text{i} \qquad -\frac{1}{s-1};$$

obydwa są logarytmami, gdyż $\frac{1}{s-1}=\{e^t\}$. Wobec tego mamy rozwiązanie ogólne

$$x(\lambda)=c_1\exp\left(\frac{\lambda}{s-1}\right)+c_2\exp\left(-\frac{\lambda}{s-1}\right)+(l+2l^2)\,e^\lambda-\lambda.$$

Z warunków (29.6) znajdujemy

$$c_1=\tfrac{1}{2}l(s-1)^2, \qquad c_2=-\tfrac{1}{2}l(s-1)^2.$$

Wobec tego

$$x(\lambda)=l(s-1)^2\operatorname{sh}\frac{\lambda}{s-1}+(l+2l^2)e^{\lambda}-\lambda=$$

$$=l(s-1)^2\left(\frac{\lambda}{1!(s-1)}+\frac{\lambda^3}{3!(s-1)^3}+\ldots\right)+(l+2l^2)e^{\lambda}-\lambda=$$

$$=\left((1-l)\lambda+\frac{\lambda^3}{3!s(s-1)}+\frac{\lambda^5}{5!s(s-1)^3}+\ldots\right)+(l+2l^2)e^{\lambda}-\lambda=$$

$$=-l\lambda+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\lambda^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!\,s(s-1)^{2\nu-1}}+(l+2l^2)e^{\lambda}=$$

$$=(l+2l^2)e^{\lambda}-l\lambda-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\lambda^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}+\ldots-\frac{1}{(s-1)^{2\nu-1}}\right)$$

i ostatecznie

$$x(\lambda,t)=(1+2t)e^{\lambda}-\lambda-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\lambda^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\left(1-e^{t}\left[1-\frac{t}{1!}+\ldots+\frac{t^{2\nu-2}}{(2\nu-2)!}\right]\right).$$

Jest to jedyne rozwiązanie czyniące warunkom zadania.

§ 30. Ogólne uwagi o rozwiązywaniu równań cząstkowych metodą operatorów

W rozważanych dotąd przykładach występowały funkcje wykładnicze następujących typów

$$e^{\lambda},\qquad e^{-\lambda s},\qquad e^{-\lambda\sqrt{s}},\qquad e^{-\lambda\sqrt{s+1}},\qquad e^{\frac{\lambda}{s}},\qquad e^{\frac{\lambda}{s-1}};$$

odpowiadają one pierwiastkom

$$1,\qquad -s,\qquad -\sqrt{s},\qquad -\sqrt{s+1},\qquad \frac{1}{s},\qquad \frac{1}{s-1}\tag{30.1}$$

równania charakterystycznego. Jest oczywiste, że tylko w specjalnych przypadkach pierwiastki równania charakterystycznego mają tak prostą postać.

Powstaje pytanie, czy równanie charakterystyczne ma zawsze pierwiastki i jaką one mają postać. Otóż można udowodnić[1]), że jeżeli równanie operatorowe

$$a_m x^m+\ldots+a_0 x=f(\lambda)$$

[1]) Mikusiński [30].

zostało wyprowadzone z równania cząstkowego o współczynnikach stałych

$$\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}a_{\mu\nu}x_{\lambda^{\mu}t^{\nu}}(\lambda,t)=\varphi(\lambda,t),$$

to równanie charakterystyczne

$$a_m u^m+\ldots+a_0=0$$

ma zawsze m pierwiastków i wszystkie te pierwiastki dadzą się przedstawić w postaci zbieżnego szeregu nieskończonego o współczynnikach liczbowych

$$w=\beta_k s^{k/q}+\ldots+\beta_1 s^{1/q}+\beta_0+\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\gamma_{\varkappa}l^{\varkappa/q},\tag{30.2}$$

gdzie k jest pewną liczbą całkowitą nieujemną, zaś q liczbą naturalną nie większą niż m. Na przykład

$$-\sqrt{s+1}=-\sqrt{s}(1+l)^{1/2}=-\sqrt{s}\left[1+\binom{\frac12}{1}l+\binom{\frac12}{2}l^2+\ldots\right]=$$

$$=-\sqrt{s}-\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\binom{\frac12}{\varkappa}l^{\frac{2\varkappa-1}{2}};$$

$$\frac{1}{s-1}=\frac{l}{1-l}=\sum_{\varkappa=1}^{\infty}l^{\varkappa}.$$

Wszystkie operatory (30.1) mogą być uważane za szczególne przypadki operatora typu (30.2).

Po znalezieniu wszystkich pierwiastków równania charakterystycznego należy następnie rozstrzygnąć, czy znalezione pierwiastki są logarytmami. Od tego bowiem zależy postać rozwiązania ogólnego i liczba występujących w nim parametrów dowolnych. Otóż mamy następujące kryterium[1]):

Jeżeli $\frac{k}{q}>1$ *i* $\beta_k\neq 0$ *lub jeżeli* $\frac{k}{q}=1$ *i* β_k *nie jest rzeczywiste, to operator* w*, określony równością* (30.2), *nie jest logarytmem. W przeciwnym razie* w *zawsze jest logarytmem.*

[1]) Mikusiński [30].

Stąd wynika na przykład, że operatory

$$s^2, \qquad s^3, \qquad s^2+is, \qquad s^2+\frac{1}{s}$$

nie są logarytmami i że wszystkie operatory (30.1) są logarytmami.

Jeżeli wszystkie współczynniki β_k są równe zeru to operator w redukuje się do funkcji klasy $\mathcal{K}$

$$f=\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\gamma_n l^{\varkappa/q}=\left\{\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\gamma_n\frac{t^{\frac{\varkappa}{q}-1}}{\Gamma\left(\frac{\varkappa}{q}\right)}\right\},$$

która jest ciągła dla $t>0$. W tym przypadku $e^{\lambda f}$ rozwija się na szereg potęgowy

$$e^{\lambda f}=1+\frac{\lambda f}{1!}+\frac{\lambda^2 f^2}{2!}+\dots. \tag{30.3}$$

Jeżeli $k=0$, to funkcję $e^{\lambda w}$ można napisać w postaci

$$e^{\lambda w}=e^{\beta_0\lambda}\cdot e^{\lambda f}.$$

Jeżeli $k=1$, to

$$e^{\lambda w}=\exp\lambda\beta_1 s^{1/q}\cdot e^{\lambda\beta_0}\cdot e^{\lambda f};$$

jeżeli $k=2$, to

$$e^{\lambda w}=\exp\lambda\beta_2 s^{2/q}\cdot\exp\lambda\beta_1 s^{1/q}\cdot e^{\lambda\beta_0}\cdot e^{\lambda f}$$

i tak dalej.

We wzorach tych kształt funkcji $e^{\lambda f}$ jest dany przez szereg (30.3); funkcja $e^{\lambda\beta_0}$ jest zwykłą funkcją wykładniczą. Pozostałe czynniki są kształtu $\exp\lambda\beta_n s^{\varkappa/q}$.

Można udowodnić ogólnie, że jeżeli $0<\alpha<1$, to przy wszelkim zespolonym β mamy rozwinięcie

$$\exp\lambda\beta s^{\alpha}=1+\frac{\lambda\beta s^{\alpha}}{1!}+\frac{(\lambda\beta s^{\alpha})^2}{2!}+\dots; \tag{30.4}$$

szereg ten jest zbieżny w sensie operatorowym przy każdym λ rzeczywistym [1]).

Jeżeli β jest rzeczywiste i ujemne, to wygodniejszy jest wzór [2])

$$\exp\lambda\beta s^{\alpha}=\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\exp\left(zt-z^{\alpha}\lambda\beta\right)dz\right\} \tag{30.5}$$

[1]) Ryll-Nardzewski [44].
[2]) Mikusiński [30].

lub równoważny mu wzór

$$\exp\lambda\beta s^{\alpha}=\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\exp\left(-xt-x^{\alpha}\lambda\beta\cos\alpha\pi\right)\cdot\sin\left(x^{\alpha}\lambda\beta\sin\alpha\pi\right)dx\right\}. \tag{30.6}$$

W szczególnym przypadku $\alpha=\frac{1}{2}$ mamy funkcję wykładniczą paraboliczną i wzory dają się uprościć do postaci

$$\exp\lambda\beta\sqrt{s}=\left\{-\frac{\beta\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\frac{\beta^2\lambda^2}{4t}\right)\right\};$$

funkcję tę omówiliśmy szczegółowo w części II (§ 29).

Wzory (30.5) i (30.6) można w szczególności stosować, gdy $\alpha=\frac{p}{q}<1$. Gdy zaś $\frac{p}{q}=1$ i β jest rzeczywiste (jeżeli β nie jest rzeczywiste to funkcja wykładnicza nie istnieje), to funkcja $\exp\lambda\beta s$ redukuje się po prostu do funkcji wykładniczej hiperbolicznej $\exp\lambda\beta s$, którą omówiliśmy w paragrafach 9 i 10 części II.

Z tych uwag widać, że rachunek operatorów daje się zastosować do każdego równania cząstkowego o współczynnikach stałych i mamy zawsze możność rozstrzygnięcia, ile pierwiastków-logarytmów ma odpowiednie równanie charakterystyczne, i znalezienia wszystkich związanych z nimi funkcyj wykładniczych. W poszczególnych przypadkach kształt pierwiastków równania charakterystycznego i odpowiednich funkcyj wykładniczych bywa często stosunkowo prosty i wtedy nie musimy się uciekać do ogólnych wzorów.

Ważny i interesujący jest przypadek, kiedy żaden z pierwiastków równania charakterystycznego nie jest logarytmem. Wtedy równanie operatorowe nazywamy *czystym* (zob. § 6); można też nazwać czystym równanie cząstkowe jemu odpowiadające, ale trzeba pamiętać, że nazwa ta nie jest symetryczna względem zmiennych λ i t.

Łatwo sprawdzić we wszystkich omawianych poprzednio przypadkach, że równania czyste nie były restryktywne. Można udowodnić twierdzenie ogólne:

Równanie czyste nigdy nie jest restryktywne [1]).

Dzięki temu w przypadku równań czystych można warunki na osi λ podawać zawsze w postaci Cauchy'ego.

[1]) Mikusiński [30].